وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 20 أوت 1955- سكيكدة

كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة

السنة الثانية ليسانس مسار تسيير

إعداد: د.سمير عماري

السنة الجامعية: 2017-2018

تقديم:

هذه المطبوعة هي عبارة عن دروس في مقياس رياضيات المؤسسة حسب البرنامج المقرر للمقياس، وهي موجهة خصوصا لطلبة السنة الثانية LMD مسار علوم التسيير. إن هذا المقياس ورغم بساطته فإن الطلبة يجدون صعوبة كبيرة في فهمه خاصة وأن الجانب الكمي يغلب عليه، لذا فإن هذه المطبوعة التي هي ثمرة تجربة سنوات عديدة في تدريس مقياس رياضيات المؤسسة بكلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير لجامعة 20 أوت 1955 بسكيكدة، صيغت بأسلوب بسيط ومختصر وذلك حتى يسهل فهمها بطريقة جيدة من طرف الطلبة وفي الوقت نفسه تنمية أفكارهم وقدراتهم على استيعاب المفاهيم الرياضية بعموميتها. ولتحقيق هذا الغرض حرصنا على ربط القواعد والمفاهيم النظرية باستخداماتها التطبيقية؛ فعملنا على إعطاء أمثلة محلولة عن كل مفهوم جديد.

قسمت هذه المطبوعة إلى خمسة فصول حيث إلتزمنا في الغالب بالمنهاج المقرر، ولكن القارئ سوف يجد أننا توسعنا في بعض الجوانب من خلال الأمثلة التي تضمنتها هذه المطبوعة والتي كانت فصولها كالتالي:

الفصل الأول: البرمجة الخطية؛

الفصل الثاني: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية؛

الفصل الثالث: تحليل الحساسية (تحليل ما بعد الأمثلية)؛

الفصل الرابع: نماذج النقل؛

الفصل الخامس: مسائل التخصيص (التعيين).

كما تجدر الإشارة إلى أن محتوى المطبوعة من نظريات وقواعد ليس من إبداع مؤلفها، وإنما هي قواعد مستنبطة من المراجع المعتمد عليها، فقط عرضناها بأسلوب رأينا أنه الملائم والأنسب لمستوى الطلبة. وعليه نقدم لطلبتنا وزملائنا هذا العمل المتواضع، ونتشرف باستقبال ملاحظاتهم حتى نستفيد منها في طبعات مقبلة بحول الله.

المقرر الدراسي

السداسي: الثالث

وحدة التعليم: منهجية

المقياس: رياضيات المؤسسة

الرصيد: 3

المعامل: 2

أهداف التعليم: التحكم في حل مشاكل اقتصادية بأدوات البرمجة الخطية وغير الخطية.

المعارف المسبقة المطلوبة: الرياضيات 1 و2

محتوى المقياس:

– البرمجة الخطية : صياغة المسألة، الحل البياني، عرض الحل بطريقة السمبلكس، المسألة الثنائية، تحليل الحساسية.

– مشاكل النقل: صياغة المسالة، حل المسألة، تمثيل مشكلة النقل بنظرية الشبكة، عرض الحل بطريقة الشبكة.

– مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود.

فهرس المحتويات

الفـصـــــــل الأول:
البرمجة الخطية

الفصل الأول: البرمجة الخطية *Linear Programming*

I. تعريف البرمجة الخطية:

يتكون مفهوم البرمجة الخطية من كلمتين هما:

- **برمجة** ***Programming***: تعني التقنية الرياضية المستعملة لإيجاد الحل الأمثل.
- **خطية** ***Linear***: تعني وجود علاقة خطية بين المتغيرات الداخلة في تركيب دالة الهدف والقيود وتمثل بخط مستقيم.

أما تعريف البرمجة الخطية فإنها تعتبر كإحدى الأساليب الرياضية التي تقوم على الإستخدام الرشيد للموارد المتوفرة (مادية، بشرية، ....الخ) والمتميزة بصفتي الندرة والمحدودية بهدف تحقيق هدف معين (تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف)، وهذا ضمن النموذج الرياضي المتكون من دالة الهدف والقيود في صورة معادلات أو متراجحات خطية (من الدرجة الأولى).

II. استخدامات البرمجة الخطية:

- المساعدة في اتخاذ القرارت المختلفة خاصة تلك المتعلقة بالوظائف الرئيسية للمؤسسة؛
- التخطيط والرقابة على الإنتاج؛
- المساعدة على تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل؛
- المساعدة في المفاضلة (الاختيار) بين طرق الإنتاج المتاحة؛
- المساهمة في تحديد أفضل الطرق لتوزيع الإنتاج؛
- توزيع الموارد الإنتاجية المتاحة (يد عاملة، مواد أولية، مستلزمات الإنتاج المختلفة...) على العمليات الصناعية بما يحقق الاستخدام الأمثل لهذه الموارد (من خلال تحديد التوليفة المثلى للمنتجات)؛
- تحديد برامج إنتاج بما يضمن تقليل التكاليف أو تعظيم الأرباح مع الأخذ في الاعتبار الطلب المتوقع.

III. الشروط الأساسية لتطبيق البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية لا تصلح للإستخدام في حل كل المشكلات الإدارية، وإنما هي محددة بتوافر شروط تطبيقها، والتي هي على النحو التالي:

- يجب أن يكون هناك هدف واضح ومحدد تحديداً دقيقاً ويمكن صياغته في صيغة رياضية صريحة؛
- يجب أن تعكس الصيغة الرياضية للهدف المُراد تحقيقه علاقة خطية متجانسة من الدرجة الأولى؛
- يجب أن تكون الموارد المتاحة محدودة ويمكن استخدامها بطرق متعددة؛
- يجب أن تكون هناك بدائل مختلفة للمشكلة يمكن المفاضلة بينها للوصول إلى الهدف؛
- يجب أن تكون العلاقة بين الموارد المتاحة والمحدودة ومتغيرات الهدف المراد تحقيقه علاقات خطية متجانسة من الدرجة الأولى، وقابلة للصياغة في صورة معادلات رياضية صريحة؛
- يجب أن تتوفر المقاييس الكمية الدقيقة والمؤكدة لعناصر المشكلة موضوع البرمجة الخطية.

IV. مكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

تتمثل في العناصر التالية:

- **وجود دالة هدف محددة:** إما تعظيم الربح ***Maximisation*** أو تخفيض التكاليف ***Minimisation***.
- **وجود عدد من المتغيرات القرارية** x_i : وهي المتغيرات التي تمثل المجاهيل في المشكلة قيد البحث.
- **وجود قيود أو محددات:** يتم التعبير عنها في شكل متباينات ≤، ≥ او معـادلات، حيـث تعكـس شـروط وظروف المؤسسة التي يجب على متخذي القرار أخذها بعين الإعتبار.
- **شرط المنطق الإقتصادي (عدم السلبية):** وهذا شرط عام وأساسي لجميع أنواع البرمجة الخطية، حيـث أن جميع قيم المتغيرات يجب أن تكون أكبر أو يساوي الصفر $x_i \geq 0$، لأنه من غير المنطقي القول بـأن إنتـاج مؤسسة معينة من المنتوجات يكون بالسالب.

V. صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

يُعد النموذج الرياضي ترجمة رياضية للمشكلة المراد حلها، حيث يهدف إلى عرضها وتوضيحها بطريقة رياضية صحيحة تمكن من الوصول إلى الحل الأمثل، ويمكن إتباع الخطوات التالية فـي صـياغة النمـوذج الرياضي:

أ. **التعريف بالمتغيرات القرارية للمشكلة موضوع البرمجة الخطية:** وهي تلك المتغيرات الموجودة في مشكلة البرمجة الخطية والتي يمكن تغييرها حتى نتمكن من الوصول إلى الحل الأمثل.

ب. **التعريف بدالة الهدف:** وذلك من خلال التعريف بالهدف الرئيسي للمشكلة في صورة تعبيرية.

ت. **الصيغة الرياضية لدالة الهدف:** حيث يمكن صياغتها كالتالي:

$$\boldsymbol{Max/\ Min\ (z) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i}$$

كما يمكن صياغتها بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{Max/\ Min\ (z) = C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+\dots+C_nX_n}$$

حيث أن:

$\boldsymbol{Max}$ تعني التعظيم و $\boldsymbol{Min}$ تعني التخفيض.

$\boldsymbol{c_i}$: معاملات دالة الهدف، إما الربح الوحدوي أو التكلفة الوحدية لكل منتوج.

$\boldsymbol{x_i}$: رموز للكميات المنتجة من كل منتوج وهي المجاهيل التي نبحث عنها.

$\boldsymbol{i}$: عدد متغيرات النموذج والمقدرة بـــ $\boldsymbol{n}$.

ث. **الصيغة الرياضية للقيود:** يعبر عنها رياضيا في شكل معادلات أو متراجحات ذات الصيغة الرياضية التالية:

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i (\leq, \geq, =) b_i}$$

حيث:

$\boldsymbol{a_{ij}}$: الكميات المستعملة من الموارد للحصول على إنتاج وحدوي من المتغيرات $\boldsymbol{x_i}$.

$\boldsymbol{b_i}$: الكميات المتاحة من المورد $\boldsymbol{i}$.

$\boldsymbol{i}$: عدد الأسطر وهي بعدد القيود $\boldsymbol{m}$.

j: *عدد الأعمدة وهي بعدد المتغيرات أو المجاهيل **n**.*

ج. شرط المنطق الإقتصادي: أي أن جميع قيم المتغيرات يجب أن تكون أكبر من أو تساوي الصفر.

مثال:

يعمل مصنع على إنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات، ولإنتاج وحدة واحدة من أي منتج يتم مـزج مـادتين مـن ثلاثة مواد أولية هي: M_1, M_2, M_3، وذلك بمقادير محددة حسب الجدول التالي:

المواد الأولية المستهلكة (كغ) للوحدة الواحدة			
	المنتج الأول	المنتج الثاني	المنتج الثالث
المادة الأولية M_1	3	0	2
المادة الأولية M_2	0	1	3
المادة الأولية M_3	5	4	0

كما يستطيع المصنع تأمين 400 كغ من المادة الأولية M_1 ، 300 كغ من المادة الأولية M_2، و350 كغ من المادة الأولية M_3. إذا علمت أن المصنع يحقق ربح قدره: 300 دج في الوحدة من المنـتج الأول، 400 دج في الوحدة من المنتج الثاني، 750 دج في الوحدة من المنتج الثالث.

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي الذي يحدد للمصنع السياسة الإنتاجية المثلى؟

الحل:

لصياغة النموذج الرياضي الذي يحدد للمصنع السياسة الإنتاجية المثلى نتبع الخطوات التالية:

أ. التعريف بالمتغيرات القرارية للمشكلة الإنتاجية موضوع البرمجة الخطية:

ليكن:

x_1: عدد الكميات اللازم إنتاجها من المنتج الأول.

x_2: عدد الكميات اللازم إنتاجها من المنتج الثاني.

x_3: عدد الكميات اللازم إنتاجها من المنتج الثالث.

z: الأرباح الإجمالية التي يمكن أن يحققها المصنع من خلال إنتاجه وتسويقه لكميات معينة من المنتجات الثلاثة.

ب. التعريف بدالة الهدف: يرغب المصنع في تعظيم أرباحه الإجمالية كنتيجة لإختياره توليفة معينة يشكلها من المنتجات الثلاثة.

ت. الصيغة الرياضية لدالة الهدف:

$$\boldsymbol{Max(z)} = 300\,X_1 + 400\,X_2 + 750\,X_3$$

ث. الصيغة الرياضية للقيود:

قيود على المدخلات:

- قيد المادة الأولية M_1: $3X_1 + 2X_3 \leq 400$
- قيد المادة الأولية M_2: $X_2 + 3X_3 \leq 300$

- قيد المادة الأولية M_3: $5X_1+4X_2 \leq 350$

ج. شرط المنطق الإقتصادي (عدم السلبية): $X_1,X_2,X_3 \geq 0$

ومنه الشكل العام للنموذج الرياضي هو كالتالي:

$$\begin{aligned} &Max(z) = 300X_1+400X_2+750X_3 \\ &3X_1+2X_3 \leq 400 \\ &X_2+3X_3 \leq 300 \\ &5X_1+4X_2 \leq 350 \\ &X_1,X_2,X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

VI. حل النموذج الرياضي بالطريقة البيانية

1. تعريف الطريقة البيانية:

تعتبر طريقة الرسم البياني طريقة سهلة وبسيطة وواضحة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية، خاصة تلك المشاكل التي لا يزيد فيها عدد المتغيرات عن إثنين فقط والتي تحتوي على عدد بسيط من القيود.

2. خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية:

للوصول إلى الحل باعتماد الطريقة البيانية يتم إتباع الخطوات التالية:

أ. تكوين النموذج الرياضي للمشكلة موضوع البرمجة الخطية (دالة الهدف، القيود)؛

ب. تحويل المتراجحات إلى معادلات؛

ت. تحديد نقاط تقاطع القيود مع المحورين الأفقي والعمودي للمعلم؛

ث. التمثيل البياني للقيود على أساس نقاط التقاطع؛

ج. تحديد منطقة الحلول الممكنة؛

ح. تعيين نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي تعطي أفضل النتائج (أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم Max أو أدنى قيمة لها في حالة التخفيض Min)، وعادة ما تكون نقطة الحل الأمثل هي نقطة تقاطع القيود وتكون في حالة التعظيم أقرب ما يكون من نقطة المبدأ وتكون في حالة التخفيض أبعد ما يكون من نقطة المبدأ.

مثال (الهدف تعظيم Max):

تنتج مؤسسة منتجين من خلال عملية إنتاج واحدة وتبيعهما في سوقين مختلفين، لدى المؤسسة 30000 ساعة عمل متوفرة، ويتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج الأول 3 ساعات عمل، بينما يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من المنتج الثاني ساعة عمل واحدة.

كما قدر قسم التسويق أن أقصى كمية يمكن بيعها من المنتجين الأول والثاني على التوالي هي:8000 وحدة و12000 وحدة.

الجدول التالي يبين التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة، وكذا وسعر بيع الوحدة الواحدة من المنتجين:

	المنتج الأول	المنتج الثاني
سعر البيع (للوحدة الواحدة)	60	40
التكلفة المتغيرة (للوحدة الواحدة)	30	10

المطلوب: صياغة النموذج الخطي للمسألة، ثم أوجد عدد الواحدات التي يجب على المؤسسة إنتاجها من هذين المنتجين لكي تحقق أقصى ربح ممكن، وذلك باستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:

أ. صياغة النموذج الرياضي للمشكلة الإنتاجية:

ليكن:

$\mathbf{x_1}$: عدد الكميات اللازم إنتاجها من المنتج الأول.

$\mathbf{x_2}$: عدد الكميات اللازم إنتاجها من المنتج الثاني.

z: الأرباح الإجمالية التي من الممكن أن تحققها المؤسسة من خلال إنتاجها وتسويقها لكميات معينة من المنتجين.

- **الصيغة الرياضية لدالة الهدف:**

$Max(z) = 30X_1 + 30X_2$

معلومة الربح الوحدوي يتم الحصول عليها من خلال طرح التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة من سعر البيع الوحدوي كما يلي:

$C_1 = 60-30 = 30DA$

$C_2 = 40-10 = 30DA$

- **الصيغة الرياضية للقيود:**

قيود على المدخلات:

قيد ساعات العمل: $3X_1+X_2 \leq 30000$

قيود على المخرجات:

القيد السوقي الأول: $X_1 \leq 8000$

القيد السوقي الثاني: $X_2 \leq 12000$

- **شرط المنطق الإقتصادي:** $X_1 \geq 0$ ، $X_2 \geq 0$

ب. تحويل المتراجحات إلى معادلات:

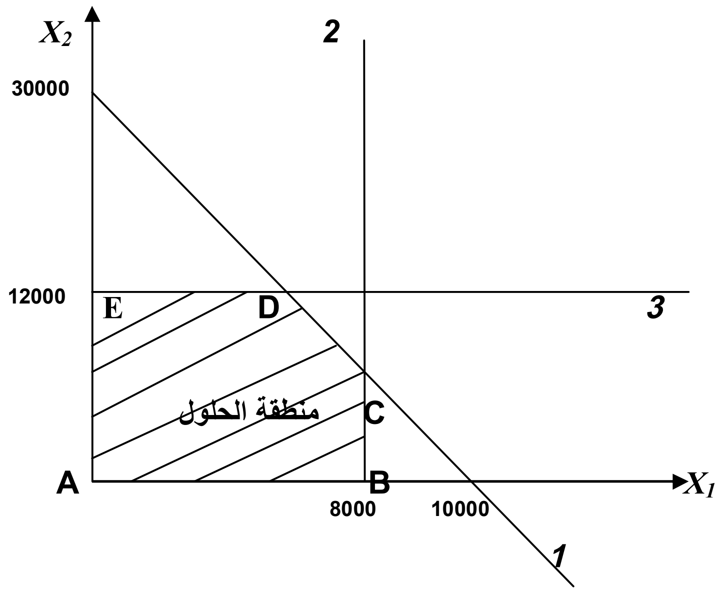
$$3X_1+X_2 = 30000$$
$$X_1 = 8000$$
$$X_2 = 12000$$

ت. تحديد نقاط تقاطع القيود مع المحورين الأفقي والعمودي:

بفرض كل مرة $X_1=0$ و $X_2=0$

القيود	القيد الأول		القيد الثاني		القيد الثالث	
X_1	0	10000	8000	/	0	/
X_2	30000	0	0	/	12000	/

ث. التمثيل البياني للقيود على أساس نقاط التقاطع:



ج. تحديد منطقة الحلول الممكنة:

منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحددة بالنقاط: *A,B,C,D,E*، والتي تعني أن كل نقطة في هذه المنطقة هي حل ممكن للنموذج الرياضي، أما إحداثيات كل نقطة فهي كالتالي:

A(0,0) **B(8000,0)** **E(0,12000)**

بالنسبة لإحداثيات النقطة C: بما أنها نقطة تقاطع القيدين 1 و 2، وبالتالي من المعادلة الأخيرة لدينا: $X_1=8000$ وبالتعويض في معادلة القيد الأول نجد:

$$3(8000)+X_2=30000 \longrightarrow X_2=6000$$

ومنه: **C(8000,6000)**

بالنسبة لإحداثيات النقطة D:

بما أنها نقطة تقاطع القيدين 1 و 3، ومن المعادلة الأخيرة لدينا: $X_2=12000$ وبالتعويض في معادلة القيد الأول نجد:

$$3X_1+12000=30000 \longrightarrow X_1=6000$$

ومنه: **D(6000,12000)**

ح. تعيين نقطة الحل الأمثل: نقطة الحل الأمثل ما هي إلا إحدى نقاط منطقة الحلول الممكنة، ولإيجادها نعوض بإحداثيات كل نقطة من نقاط منطقة الحلول في دالة الهدف، حيث يتحقق الحل الأمثل عند أكبر قيمة لدالة الهدف أكبر قيمة لدالة الهدف باعتبار أن هدف البرنامج هو التعظيم Max.

النقاط	X_1	X_2	Z/ دج
A	0	0	**0**
B	8000	0	**240000**
C	8000	6000	**420000**
D	6000	12000	**540000**
E	0	12000	**360000**

من خلال الجدول أعلاه يتضح أن أكبر قيمة لدالة الهدف تحققت عند النقطة **D**(6000,12000)، وبالتالي هذه النقطة هي نقطة الحل الأمثل، بمعنى أن السياسة الإنتاجية المثلى للمؤسسة هي أن تنتج 6000 وحدة من X_1 و 12000 وحدة من X_2 لتحقيق أعظم ربح يقدر بـ: 540000 دج.

ملاحظة: في نقطة الحل الأمثل ليس بالضرورة الإستخدام التام للكميات المتاحة للقيود، بل يكفي تحقيق دالة الهدف.

<u>مثال (الهدف تدنية *Min*):</u>

ليكن النموذج الرياضي التالي:

$Min(Z)=200X_1+100X_2$

s/t:

$X_1+X_2\leq 200$ ……………………….1

$X_1\geq 80$ ………………………….2

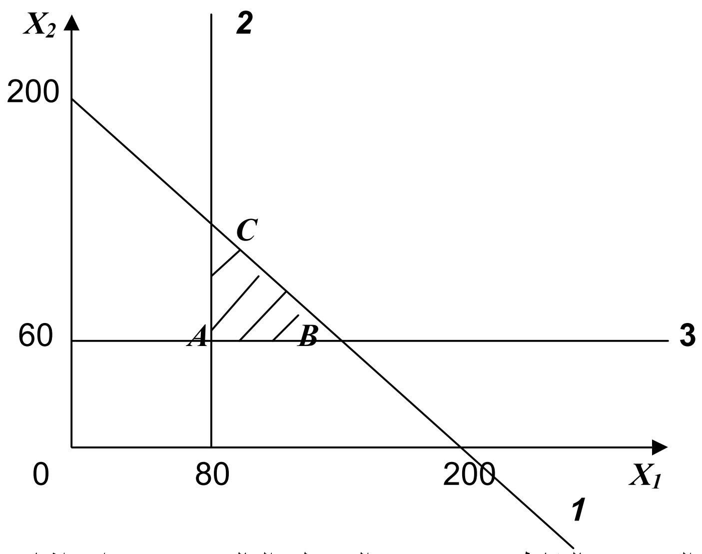
$X_2\geq 60$ …………………………..3

$X_1,X_2\geq 0$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للنموذج الرياضي باستخدام الطريقة البيانية؟

<u>الحل:</u>

باتباع نفس الخطوات السابقة، الرسم البياني للنموذج الخطي هو كالتالي:



منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحددة بالنقاط: ***A,B,C***، والجدول التالي يوضح إحداثيات وقيمة الهدف عند كل نقطة:

النقاط	X_1	X_2	Z
A	80	60	22000
B	140	60	34000
C	80	140	30000

نلاحظ من الجدول أعلاه أن أقل قيمة لدالة الهدف تحققت عند النقطة ***A***، بمعنى أن النقطة (80,60) ***A*** هي نقطة الحل الأمثل.

ملاحظة: في حالة دالة الهدف من الشكل ***Min***، فإن نقطة الحل الأمثل هي النقطة التي تحقق أقل قيمة لـــ ***Z***، بشرط: $Z \neq 0$.

3. بعض الحالات الخاصة بالطريقة البيانية:

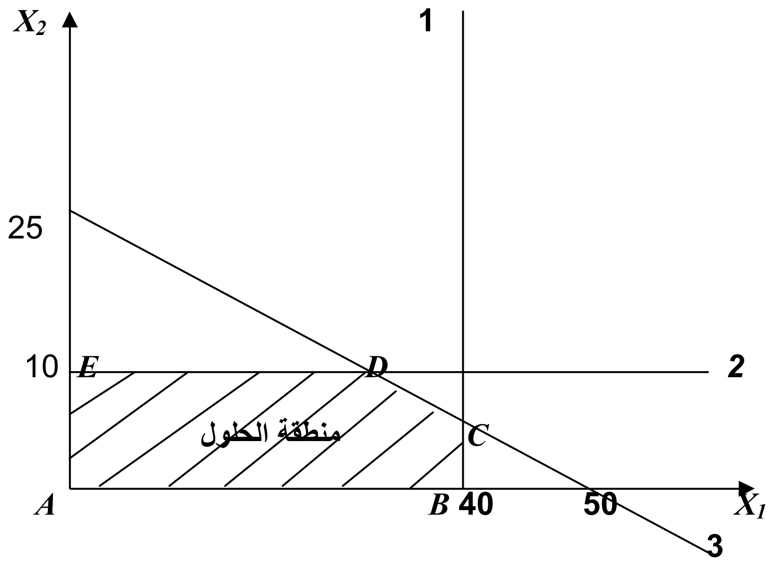
أ. حالة الحلول المثلى البديلة (وجود حلول متعددة)

نقول بأن هناك حالة حلول مثلى بديلة إذا كانت منقطة الحلول الممكنة تحتوي على أكثر من نقطة تعطي أفضل قيمة لدالة الهدف Z.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = X_1+2X_2$$
$$X_1 \leq 40$$
$$X_2 \leq 10$$
$$2X_1+4X_2 \leq 100$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



من خلال الشكل أعلاه نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة تتمثل في المنطقة **A,B,C,D,E** والجدول التالي يوضح إحداثيات وقيمة الهدف عند كل نقطة:

النقاط	X_1	X_2	Z
A	0	0	0
B	40	0	40
C	40	5	50
D	30	10	50
E	0	10	20

من خلال الجدول يتضح أن أكبر قيمة لدالة الهدف تحققت عند النقطتين **C** و **D**، وهما تمثلان حلا أمثلا لأن قيمة Z أكبر ومتساوية، بل الأكثر من ذلك فإن كل النقاط الموجودة على الخط CD تعطي حلولا مثلى بديلة للبرنامج، حيث أن كل قيم X_1، X_2 تختلف من نقطة إلى أخرى على القطعة المستقيمة **CD** بينما قيمة الهدف Z تبقى ثابتة، ومنه نقول أن البرنامج الخطي أو المسألة لها حلول مثلى بديلة.

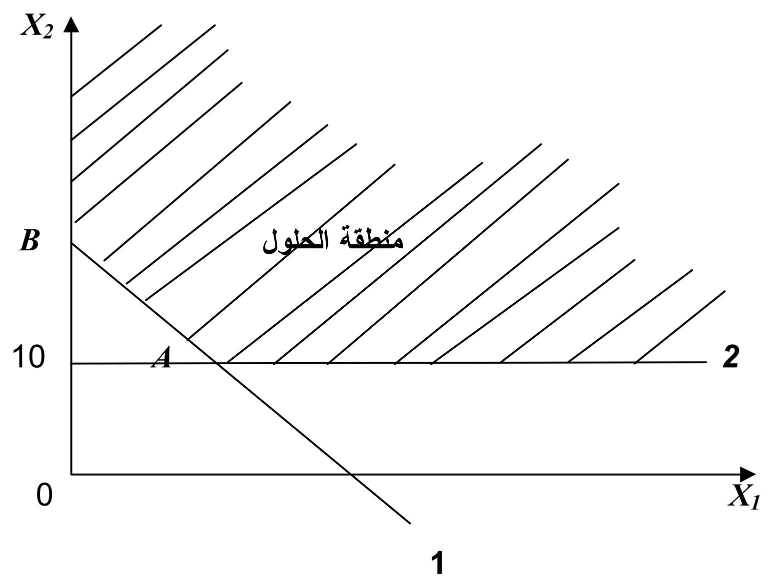
ب. حالة عدد لا نهائي من الحلول (منطقة الحلول الممكنة غير المحدودة)

في هذه الحالة فإن دالة الهدف تزداد بشكل غير نهائي دون المساس بالقيود.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \text{Min}(z) &= 4X_1+3X_2 \\ X_1+X_2 &\geq 20 \\ X_2 &\geq 10 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



من خلال الشكل أعلاه نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة غيرمحدودة ولها نقطتين فقط همـا **A** و**B**، ولتحديـد نقطة الحل الأمثل نعوض إحداثيات هاتين النقطتين في دالة الهدف.

النقاط	X_1	X_2	Z
A	10	10	70
B	0	20	60

بما أن النقطة B تعطي أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف فهي نقطة الحل الأمثل.

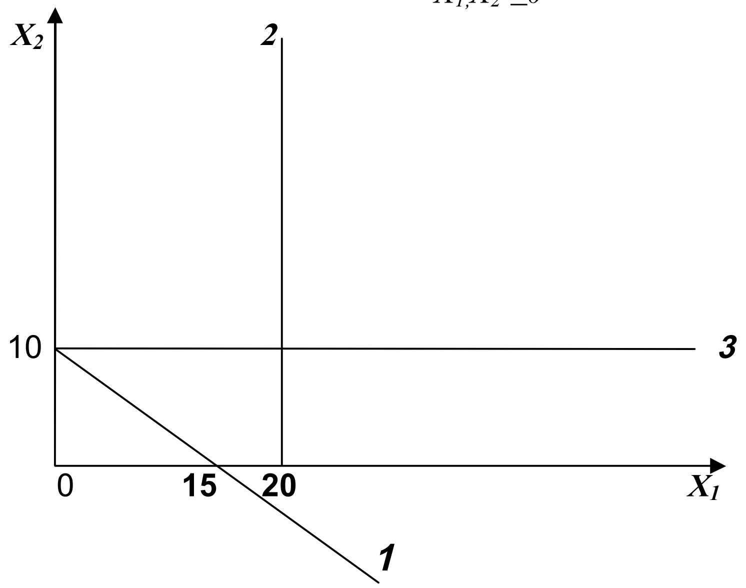
ت. حالة عدم وجود الحل(عدم وجود منطقة الحلول الممكنة)

في هذه الحالة فإن منطقة الحلول لا يمكن تشكيلها، وهذا راجع نتيجة لتناقض ما بين قيدين أو أكثر في البرنامج.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 5X_1 + 2X_2$$
$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$
$$X_1 \geq 20$$
$$X_2 \geq 10$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



من خلال الشكل أعلاه نلاحظ أنه ليست هناك منطقة حلول ممكنة، أي ليست هناك منطقة تحقق كل القيود في آن واحد، وهذا بسبب التناقض الموجود بين هذه الأخيرة، مما يستوجب إعادة النظر في البرنامج بإضافة قيود أخرى أو تصحيح القيود السابقة حتى تتشكل منطقة الحلول الممكنة.

4. تصنيف الموارد باستخدام الطريقة البيانية:

تصنف الموارد بيانيا إلى ثلاثة انواع:

أ. الموارد النادرة (الملزمة): وهي الموارد التي استهلكت كليا في العملية الإنتاجية، كما أنها تشارك في تحديد منطقة الحلول الممكنة وفي تحديد نقطة الحل الأمثل.

ب. الموارد المتوفرة (غير الملزمة): وهي الموارد التي استهلكت جزئيا في العملية الإنتاجية، كما أنها تشارك في تحديد منطقة الحلول الممكنة ولكن لا تشارك تحديد في نقطة الحل الأمثل.

ت. الموارد الفائضة: وهي الموارد التي لم تستخدم في العملية الإنتاجية، كما أنها لا تشارك في تحديد منطقة الحلول الممكنة و لا في تحديد في نقطة الحل الأمثل.

5. تقييم الطريقة البيانية:

يتم تقييم الطريقة البيانية في شكل مزايا وعيوب كالتالي:

أ. مزايا الطريقة البيانية:

- سهولة استخدامها وبساطتها؛
- توضيح بعض مفاهيم البرمجة الخطية.

ب. عيوب الطريقة البيانية:

- تستعمل فقط إذا كان عدد المتغيرات لا يزيد عن اثنين ونادرة التطبيق؛
- تفترض الاستخدام التام للكميات المتاحة من خلال تحويل المتراجحات إلى معادلات مباشرة؛
- النتائج المستخلصة تقريبية وغير مؤكدة بشكل تام.

VII. حل النموذج الرياضي باستخدام طريقة السمبلكس (المبسطة) *simplex*

1. تعريف طريقة السمبلكس *simplex*

تمتاز هذه الطريقة بقدرتها على حل النماذج الخطية ولعدد غير محدود من المتغيرات، على عكس الطريقة البيانية التي تستعمل فقط لحل البرامج الخطية التي تتضمن متغيرين اثنين فقط، وبما أن أغلب المسائل في الحياة العملية تحتوي على عدد كبير من المتغيرات فإنه يتم اللجوء في العادة إلى إستخدام طريقة السمبلكس *simplex*، وهي طريقة تكرارية تعتمد على عدد من الجداول حيث يتم الإنتقال من جدول إلى آخر مع تحسين قيمة دالة الهدف في كل مرة إلى أن يتم التوصل إلى الجدول الأخير والذي يعطي الحل الأمثل.

2. شروط طريقة *simplex* البسيطة للوصول إلى الحل الأمثل:

هناك شرطين أساسين للوصول إلى الحل الأمثل هما:

- **شرط العملية:** يشترط أن تكون جميع عناصر عمود الموارد موجبة (أكبر أو تساوي الصفر) حتى نصل إلى جدول أولي عملي سواء كانت دالة الهدف من الشكل ***Max*** أو ***Min***.
- **شرط الأمثلية:** يمكن إعتبار أن الحل حلا أمثلا إذا كانت جميع عناصر السطر ***Z*** أكبر أو تساوي الصفر وذلك في حالة دالة الهدف من الشكل ***Max***، والعكس في حالة دالة الهدف من الشكل ***Min*** أي يشترط أن تكون جميع عناصر السطر ***Z*** أصغر أو تساوي الصفر.

3. خطوات استخدام طريقة السمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل:

تتمثل في الخطوات التالية:

أ. تحويل البرنامج الخطي إلى الشكل المعياري؛

ب. إيجاد الحل الإبتدائي (الأولي)؛

ت. إختبار أمثلية الحل؛

ث. تحسين الحل إلى غاية التوصل إلى الحل الأمثل.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 3X_1 + 2X_2$$
$$3X_1 + 4X_2 \leq 12$$
$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$
$$-X_1 + 4X_2 \leq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للبرنامج باستخدام طريقة السمبلكس؟

الحل:

لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلكس نتبع الخطوات التالية:

أ. تحويل البرنامج الخطي إلى الشكل المعياري أو القياسي:

وذلك من خلال تحويل كل القيود من متراجحات إلى معادلات بطرف أيمن موجب مع:

- إدخال المتغيرات الأساسية أو متغيرات الفرق (S_i) بإشارة موجبة على المتراجحات من الشكل أقل أو يساوي ≥ وبإشارة سالبة على المتراجحات من الشكل أكبر أو يساوي≤. كما أن كل منها يظهر في معادلة واحدة فقط ويكون معاملها +1 أو −1 على حسب طبيعة المتراجحة.
- إدخال المتغيرات الوهمية أو الإصطناعية (R_i) وبإشارة موجبة على القيود من الشكل أكبر أو يساوي ≤ و يساوي (=) فقط.

إن الجدول التالي يلخص كيفية ادخال المتغيرات (S_i) و (R_i) في القيود أثناء عملية التحويل إلى الشكل المعياري:

المتغيرات الوهمية R_I	المتغيرات الأساسية S_i	شكل القيد
/	$+S_1$	*أقل أو يساوي ≥*
$+Ri$	/	*يساوي =*
$+Ri$	$-Si$	*أكبر أو يساوي ≤*

ملاحظة:

- بالنسبة للمتغيرات الأساسية (S_i) فإن عائدها في دالة الهدف يساوي الصفر ومعناها الإقتصادي أنها عبارة عن كمية متاحة عاطلة أو غير مستغلة، والهدف من استخدامها هو المساعدة في الوصول إلى الحل فقط.
- بالنسبة للمتغيرات الإصطناعية (R_i) فمعناها الإقتصادي أنها عبارة عن مواد ذات تكلفة عالية جدا تقدر بـ M (M هو عدد كبير جدا موجب يقترب من ∞)، كما أنها لا تظهر في الحل النهائي، وإنما تستخدم للمساعدة في الوصول إلى الحل فقط، ومعاملها في دالة الهدف هو $(-M)$ في حالة ***Max*** ، و$(+M)$ في حالة ***Min*** ، كما يلي:

$$Max \longrightarrow -MRi$$
$$Min \longrightarrow +MRi$$

وعليه الشكل المعياري للمثال السابق هو كالتالي:

$$Max(z) = 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$
$$3X_1+4X_2+S_1=12 \ldots\ldots 1$$
$$X_1+4X_2+S_2=8 \ldots\ldots 2$$
$$-X_1+4X_2+S_3=8 \ldots\ldots 3$$
$$X_1,X_2,S1,S2,S_3 \geq 0$$

ب. إيجاد الحل الإبتدائي (الأولي):

أي إيجاد الجدول الأول من جداول السمبلكس وذلك كما يلي:

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد T_0
S_1	3	4	1	0	0	12
S_2	1	4	0	1	0	8
S_3	-1	4	0	0	1	8
Z_0	**-3**	-2	0	0	0	0

بالنسبة لمعاملات دالة الهدف في السطر Z فتأخذ بإشارة سالبة في حالة البرنامج من الشكل Max في جدول السمبلكس الأولي، والعكس في حالة البرنامج من الشكل Min فتسبق بإشارة موجبة.

ت. إختبار أمثلية الحل:

يلاحظ من خلال جدول السمبلكس الأولي T_0 أن شرط الأمثلية غير محقق أي أن جميع عناصر السطر Z ليست أكبر أو يساوي الصفر باعتبار أن البرنامج من الشكل Max وبالتالي الحل غير أمثل مما يستوجب التحسين.

ث. تحسين الحل لإيجاد الحل الأمثل:

أي البحث عن الحل الأفضل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل كما يلي:

- **تحديد المتغير الداخل إلى الأساس (تحديد عمود الدوران):** ننظر إلى العناصر السالبة فقط في السطر **Z** ونختار العمود الذي به أصغر قيمة سالبة (أكبر عنصر بالقيمة المطلقة) في حالة Max، أما في حالة Min فإختيار المتغير الداخل يكون على أساس أكبر قيمة موجبة في السطر Z.
- **تحديد المتغير الخارج من الأساس(تحديد سطر الدوران):** نقوم بقسمة عناصر عمود الموارد على العناصر الأكبر تماما من الصفر المقابلة لها في عمود الدوران، أقل ناتج قسمة موجب يحدد المتغير الخارج (سطر الدوران) في حالة Max أو Min .
- **تحديد عنصر الدوران:** هو العنصر الذي يتقاطع فيه سطر الدوران مع عمود الدوران. وانطلاقا من هذا العنصر يمكن الإنتقال إلى الجدول الموالي والحصول على عناصره كالتالي:
  - **عناصر سطر الدوران الجديد:** عناصر سطر الدوران القديم/ عنصر الدوران.
  - **عناصر بقية الأسطر في الجدول الجديد:** تحسب كالتالي:

عناصر السطر الجديد لـ: (Xi,Si,Ri) =

عناصر السطر القديم لـ: (Xi,Si,Ri) – [(العنصر المقابل لـ: Xi,Si,Ri في عمود الدوران) x (عناصر سطر الدوران الجديد)]

<u>بالنسبة للمثال السابق:</u>

- **عمود الدوران أو المتغير الداخل هو:** X_1، لأنه العمود الذي يشتمل على أصغر قيمة سالبة (أكبر عنصر بالقيمة المطلقة) في السطر Z. ومنه المتغير الداخل إلى الأساس هو: X_1.

▪ **سطر الدوران أو المتغير الخارج هو: S_1**، لأن أقل ناتج قسمة موجب لعناصر عمود الموارد على العناصر **الأكبر تماما من الصفر** المقابلة لها في عمود الدوران موجودة في هذا السطر، ومنه المتغير الخارج من عمود الأساس هو: S_1.

▪ **عنصر الدوران هو :** العدد *3*، لأنها القيمة التي يتقاطع فيها سطر الدوران مع عمود الدوران.

▪ **عناصر سطر الدوران الجديد X_1** = عناصر سطر الدوران القديم S_1**/** عنصر الدوران.

$$[3.4.1.0.0.12] /3 = [1 .4/3 .1/3 .0 .0 .4]$$

- عناصر السطر الجديد لـS_2 = عناصر السطر القديم لـ: (S_2) − [(العنصر المقابل لـ: S_2 في عمود الدوران) x (عناصر سطر الدوران الجديدX_1)]

بالتعويض نجد:

- عناصر السطر الجديد لـ S_2 = ($1.4.0.1.0.8$) − [(1) x (4. 0. 0. 1/3. 4/3. 1)] = **(4. 0. 1. 1/3−. 3/ 8. 0)**

بنفس الطريقة نجد:

عناصر السطر الجديد لـ S_3 = (12. 1. 0. 1/3، 16/3، 0)

عناصر السطر الجديد لـ Z = (12. 0. 0. 1، 2، 0)

ومنه جدول السمبلكس الجديد T_1هو كالتالي:

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود المواردT_1
X_1	**1**	**4/3**	**1/3**	**0**	**0**	**4**
S_2	0	8/3	−1/3	1	0	4
S_3	**0**	16/3	1/3	0.	1	12
Z_1	**0**	2	1	0	0	12

نلاحظ من خلال الجدول T_1 أن جميع عناصر السطر Z_1 أكبر أو تساوي 0 وهذا يعني أن شرط الأمثلية محقق، والحل الأمثل هو كالتالي: **$X_1=4, X_2=0, Z=12$.**

4. تقنية *Big M* (طريقة الجزاء)

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Min(z) = 3000 X_1+8000X_2$$
$$200 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 = X_1+X_2$$
$$X_1 \leq 80 \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$
$$X_2 \geq 60 \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$
$$X_1,X_2 \geq 0$$

لإيجاد الحل الأمثل باستخدام تقنية ***M*** نتبع نفس الخطوات السابقة مع الإختلاف في بعض القواعد، نوضحها كما يلي:

أ. تحويل البرنامج الخطي إلى الشكل المعياري أو القياسي:

$$Min(z) = 3000\,X_1 + 8000X_2 + MR_1 + MR_2$$

St:

$$X_1+X_2+R_1=200 \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$X_1+S_1=80 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$
$$X_2-S_2+R_2=60 \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$
$$X_1,X_2,S_1,S_2,R_1,R_2 \geq 0$$

$R_1.R_2$: متغيرات وهمية ليس لها معنى إقتصادي، قيمتها في الحل الأمثل تساوي الصفر، وتستخدم من أجل المساعدة في الوصول إلى الحل فقط.

S_1: الطاقة العاطلة أو غير المستغلة.

S_2: يمثل مقدار الفرق بين الطرفين الأيمن والأيسر للقيد الثالث (مقدار الفائض).

معامل R_1 و R_2 في دالة الهدف هو (+M)، وبما أن قيمتها بالضرورة تساوي الصفر في الحل الأمثل، فعلينا استبعادها من دالة الهدف في شكلها المعياري، من خلال التعويض عن المتغيرات الوهمية بما تساويه في القيود فيكون لدينا:

من القيد الأول:

$$R_1=(200-X_1-X_2)$$

من القيد الثالث:

$$R_2=(60-X_2+S_2)$$

بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$Min(z) = 3000\,X_1+8000X_2+M(200-X_1-X_2)+M(60-X_2+S_2)$$
$$\boldsymbol{=(3000-M)\,X_1+(8000-2M)\,X_2+M\,S_2+260M}$$

ب. إيجاد الحل الإبتدائي (الأولي):

أي الجدول الأول من جداول السمبلكس وذلك كما يلي:

عمود الأساس	X_1	X_2	R_1	S_1	S_2	R_2	عمود الموارد T_0
R_1	1	1	1	0	0	0	200
S_1	1	0	0	1	0	0	80
R_2	0	1	0	0	-1	1	60
Z_0	–(3000-M)	- (8000-2M)	0	0	-M	0	260M

ت. إختبار أمثلية الحل:

يلاحظ من خلال جدول السمبلكس الأولي T_0 أن شرط الأمثلية غير محقق أي أن جميع عناصر السطر Z ليست أقل أو يساوي الصفر باعتبار أن البرنامج من الشكل Min وبالتالي الحل غير أمثل مما يستوجب التحسين

ث. تحسين الحل لإيجاد الحل الأمثل:

أي البحث عن الحل الأفضل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل كما يلي:

عمود الأساس	X_1	X_2	R_1	S_1	S_2	R_2	عمود الموارد T_1
R_1	1	0	1	0	1	-1	140
S_1	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	1	0	0	-1	1	60
Z_1	**-3000+M**	**0**	**0**	**0**	**-8000+2M**	**8000-2M**	**480000+140M**

يلاحظ من خلال جدول السمبلكس T_1 أن شرط الأمثلية غير محقق ومنه يتم الإنتقال إلى جدول السمبلكس T_2.

عمود الأساس	X_1	X_2	R_1	S_1	S_2	R_2	عمود الموارد T_2
R_1	0	0	1	-1	1	-1	60
X_1	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	1	0	0	-1	1	60
Z_2	**0**	**0**	**0**	**3000-M**	**-8000+M**	**8000-2M**	**720000+60M**

يلاحظ من خلال جدول السمبلكس T_2 أن شرط الأمثلية غير محقق ومنه يتم الإنتقال إلى جدول السمبلكس T_3.

عمود الأساس	X_1	X_2	R_1	S_1	S_2	R_2	عمود الموارد T_3
S_2	*0*	*0*	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*60*
X_1	*1*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*80*
X_2	*0*	*1*	*1*	*-1*	*0*	*0*	*120*
Z_3	***0***	***0***	***8000-M***	***-5000***	***0***	***-M***	***1200000***

يلاحظ من خلال جدول السمبلكس T_3 أن شرط الأمثلية محقق أي أن جميع قيم السطر Z أقل أو تساوي 0، بالإضافة إلى إستبعاد قيم R_1 وR_2 من عمود الأساس وعليه فإن هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل حيث:

$$X_1=80,\ X_2=120,\ Z=1200000.$$

5. بعض الحالات الخاصة بطريقة السمبلكس

أ. حالة الحل غير العملي (عدم وجود الحل الأمثل): وهي الحالة التي لا يمكن الوصول فيها إلى حل أمثل للبرنامج، أي لا توجد منطقة حلول ممكنة تحدد لنا حل عملي للبرنامج، وتظهر هذه الحالة إذا كان هناك تناقضا بين قيدين على الأقل من القيود المكونة للبرنامج، كما أن هذه الحالة قد يتم فيها الوصول إلى حل أمثل للبرنامج أو للمشكلة المدروسة ولكن هذا الحل الأمثل يحتوي على متغير إصطناعي (وهمي *Ri*) أو أكثر، وبالتالي نقول أن البرنامج ليس له حل أمثل، وعليه في حالة ظهور الحل غير العملي فإنه تتم مراجعة البرنامج الخطي من جديد وهذا لتوقع وجود أخطاء في صياغته.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$Max(z)$ $=50\ X_1+40\ X_2$

St:

$3X_1+5X_2\leq 150$

$X_1+X_2\leq 120$

$X_1\geq 140$

$X_2\leq 40$

$X_1,X_2\geq 0$

ب. حالة عدد لا نهائي من الحلول (الحلول غير المحدودة): وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود الدوران بقيم سالبة أو تساوي 0، وبالتالي عند قسمة عناصر عمود الموارد على عناصر عمود الدوران المقابلة لها، فإن نواتج القسمة تكون فقط قيم سالبة أو ما لانهاية ∞، وهذا يعني أن البرنامج له عدد لا نهائي من الحلول العملية، وبالتالي لا بد من تعديل النموذج الأصلي.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$Max(z)$ $=20\ X_1+30\ X_2$

St:

$X_1\geq 10$

$X_2\leq 5$

$X_1,X_2\geq 0$

ت. حالة الحلول المثلى البديلة: تحدث هذه الحالة عند وجود أكثر من متغير يريد الدخول إلى عمود الأساس، وبالتالي نختار إحدى المتغيرات الداخلة عشوائيا ونكمل الحل وسوف نجد نفس الحل الأمثل (قيمة **Z هي نفسها**)، ويمكن حدوث هذه الحالة في أي جدول سمبلكس، كما أن الإختلاف في هذا الإختيار يكمن في أن إحدى المتغيرات سوف تعطي الحل الأمثل بسرعة عكس الأخرى.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$Max(z)$ $=30\ X_1+30\ X_2$

$3X_1+X_2\leq 30000$

$X_1\leq 8000$

$X_2\leq 12000$

$X_1,X_2\geq 0$

ث. حالة الانحلالية أو الانحراف (عدم الإنتظام): هذه الحالة هي عكس حالة الحلول المثلى البديلة، حيث تحدث في حالة ما يريد أكثر من متغير الخروج من عمود الأساس، أي أن كل متغير يؤدي إلى حل أمثل، وإنما الإختلاف في عدد الجداول التي يتم تشكيلها من أجل الوصول إلى الحل الأمثل فقط.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 50X_1 + 40X_2$$
$$3X_1 + 5X_2 \leq 175$$
$$X_2 \leq 20$$
$$8X_1 + 5X_2 \leq 30$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

6. تصنيف الموارد باستخدام طريقة السمبلكس:

هناك طريقتين:

- **الطريقة الأولى:** من عمود الأساس لجدول الحل الأمثل إذا كان:

$S_i=0$ المورد هو: **مورد نادر.**

$S_i\neq 0$ المورد هو: **مورد متوفر.**

الموارد النادرة: هي الموارد التي خرجت متغيراتها الأساسية من عمود الأساس لجدول الحل الأمثل.

الموارد المتوفرة : هي الموارد التي لم تخرج متغيراتها الأساسية من عمود الأساس لجدول الحل الأمثل.

- **الطريقة الثانية:** من السطر Z^* لجدول الحل الأمثل إذا كان:

$S_i\neq 0$ ؛ المورد هو: **مورد نادر.**

$S_i=0$ المورد هو: **مورد متوفر.**

الموارد النادرة: هي الموارد التي قيمة وحدتها لا تساوي الصفر في السطر Z^* لجدول الحل الأمثل.

الموارد المتوفرة : هي الموارد التي قيمة وحدتها تساوي الصفر في السطر Z^* لجدول الحل الأمثل.

7. قيمة الوحدة للمورد:

يقصد بها مقدار الزيادة في قيمة Z المثلى، نتيجة للزيادة في مقدار المورد المتاح أو المتوفر بوحدة واحدة.

مثال: انطلاقا من السطر Z لجدول الحل الأمثل إذا كان:

$S_i=0$**:** هذا معناه أن القيد متوفر، وبالتالي أي زيادة في الطرف الأيمن (الكمية المتاحة) للقيد المعني بوحدة واحدة لا يؤدي إلى الزيادة في قيمة Z المثلى.

$S_i=+a\neq 0$**:** هذا معناه أن القيد نادر، وبالتالي أي زيادة في الطرف الأيمن للقيد المعني بوحدة واحدة يؤدي إلى الزيادة في قيمة Z المثلى بمقدار a.

ملاحظة: ليس بالضرورة إذا كانت قيمة الوحدة للمورد أكبر من الصفر، هذا يعني أن المورد نادر، لانه قد تكون هناك موارد متوفرة بالرغم من ان قيمة الوحدة للمورد أكبر من الصفر.

تطبيقات عملية لطريقة السمبلكس:

يتم تطبيق طريقة السمبلكس فقط في مؤسسة صناعية تصنع أكثر من منتوج خاصة لبرمجة الإنتاج وفي عدة مجالات أهمها:

- تخطيط الإنتاج أي البحث عن خطة للإنتاج تشمل كميات المنتوجات والطاقة المستغلة وقيمة العائد أو التكلفة مع توضيح تأثير تغيرات المحيط على هذه النتائج وفق تحليل الحساسية؛
- الإستغلال الأمثل للموارد، أي توضح الكميات المستهلكة من الموارد (يد عاملة، آلات، مواد وأموال) لاستغلال الفائض في مجالات أخرى أو عدم توريده بتاتا أو توفير العجز لكي لا تتوقف عملية الإنتاج في مراحلها؛
- مشكلة المزيج الإنتاجي، أي تحديد الكميات (النسب) المستهلكة من الموارد وكذا الكميات المنتجة من الممنتوجات مثلا: في مجال الأدوية.

VIII. تقييم البرمجة الخطية

يتم تقييم البرمجة الخطية في شكل مزايا وعيوب كالتالي:

1. مزايا البرمجة الخطية: من أهمها الآتي:

- تساعد على تحليل المشاكل الكبيرة الحجم (عدد كبير من المتغيرات والقيود)؛
- الإستغلال الأمثل للموارد النادرة والمتاحة؛
- إتخاذ القرار الأمثل للمشكلة المدروسة؛
- إمكانية تعديل الحل الأمثل بواسطة تحليل الحساسية.

2. عيوب البرمجة الخطية: من أهمها الآتي:

- عدم إدخال عنصر عدم التأكد في الدراسة أي لا تستخدم الاحتمالات خاصة أن محيط المؤسسة يتغير باستمرار؛
- لا تعطي أهمية للعوامل غير القابلة للقياس مثلا جودة المنتوج؛
- لا تعطي أهمية للظواهر غير القابلة للإنقسام مثلا صنع منتوج تام كالسيارة، لذلك نلجأ لتطبيق البرمجة بالأعداد الكاملة؛
- تهمل دراسة العلاقات غير الخطية بين المتغيرات لذلك نطبق البرمجة غير الخطية؛
- تهمل دراسة المسائل ذات عدة أهداف لذلك نطبق البرمجة متعددة الأهداف.

الفـــصــــــــل الثاني:
المسائل الثنائية في البرمجة الخطية

الفصل الثاني: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية

1.تعريف النموذج الثنائي* *Modèle Dual*

هو عملية عكس النموذج الأولي (الأصلي) بكل محتوياته، أي عملية تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج ثنائي، بحيث تطبق على هذا الأخير كل المعطيات والفرضيات والخصائص والشروط التي تطبق على النموذج الأصلي. إلا أنه يختلف عنه فقط فيما يخص الصياغة، وبصفة أخص فيما يتعلق بالمعنى الإقتصادي لمتغيراته.

2.خطوات تحويل النموذج الأولي (الأصلي) إلى نموذج ثنائي:

يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الاصلي إلى نموذج ثنائي فيما يلي:

- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأصلي من الشكل Max فإنها في النموذج الثنائي تصبح من الشكل Min والقيود كلها من الشكل أكبر أو يساوي ≤؛ والعكس صحيح أي إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأصلي من الشكل Min فإنها في النموذج الثنائي تصبح من الشكل Max والقيود كلها من الشكل أقل أو يساوي ≥ ؛
- عدد متغيرات النموذج الأصلي يساوي عدد قيود النموذج الثنائي والعكس صحيح؛
- عدد قيود النموذج الأصلي يساوي عدد متغيرات النموذج الثنائي والعكس صحيح؛
- معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح قيم الطرف الأيمن (الموارد) للقيود في النموذج الثنائي والعكس صحيح؛
- قيم الطرف الأيمن للقيود (الكميات المتاحة) في النموذج الأصلي تصبح معاملات متغيرات دالة الهدف في النموذج الثنائي والعكس صحيح؛
- إذا كانت القيود في النموذج الأصلي من الشكل أقل أو يساوي ≥ فإنها في النموذج الثنائي تصبح من الشكل أكبر أو يساوي ≤ والعكس صحيح؛
- تغيير رمز المتغيرات في النموذج الأصلي مثلا من ***Xi*** إلى ***Yi*** في النموذج الثنائي والعكس صحيح مع إضافة شرط عدم السلبية للمتغيرات الجديدة في النموذج الثنائي.

الجدول التالي يلخص قواعد تحويل النموذج الأصلي إلى النموذج الثنائي:

النموذج الأصلي	النموذج الثنائي
	W
Xi	*Yi*
معاملات دالة الهدف	الطرف الأيمن للقيود
الطرف الأيمن للقيود	معاملات دالة الهدف
≥	≤

* كما يقصد به أيضا النموذج النظيرأو المعاكس أو المقابل أو المرافق.

≤	≥
مصفوفة المعاملات الصفوف الأعمدة	منقول مصفوفة المعاملات الصف يصبح عمود العمود يصبح صف
شرط عدم السلبية	شرط عدم السلبية

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$Max(z) = 50 X_1 + 40 X_2$
$3X_1+5X_2 \leq 175$
$X_2 \leq 20$
$8X_1+4X_2 \leq 3$
$X_1, X_2 \geq 0$

المطلوب: أوجد البرنامج الثنائي المرافق للبرنامج الأصلي؟

الحل:

النموذج الأصلي	النموذج الثنائي
$Max(z) = 50 X_1 + 40 X_2$ St: $3X_1+5X_2 \leq 175$ $X_2 \leq 20$ $8X_1+4X_2 \leq 3$	$Min(W) = 175Y_1+20Y_2+3Y_3$ St: $3Y_1+0Y_2+8Y_3 \geq 50$ $5Y_1+1Y_2+4Y_3 \geq 40$
$X_1, X_2 \geq 0$	$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$

ملاحظة: حتى نتجنب الأخطاء المحتملة عند صياغة النموذج الثنائي نقترح القيام بما يلي:

- إذا كان النموذج الأصلي ذا صيغة مختلطة (عامة) أي يحتوي على مزيج من المتراجحات من النوع (≤،≥)، فإنه يجب تحويله إلى الصيغة القانونية ثم تحويله إلى النموذج الثنائي (الصيغة القانونية تعني أنه إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأصلي من الشكل Max فإن القيود يجب أن تكون كلها من النوع أقل أو يساوي ≤ وخلاف ذلك نضرب طرفي القيد في (-1)، أما إذا كانت دالة الهدف من الشكل Min فإن القيود يجب أن تكون كلها من النوع أكبر أو يساوي≥ وخلاف ذلك نضرب طرفي القيد في (-1)
- إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأصلي على شكل $Min(z)$ نقوم بتحويلها إلى $Max(-z)$ بضرب معاملاتها في (-1)؛
- تحول القيود التي هي على شكل أكبر أو يساوي ≥ إن وجدت في النموذج الأصلي إلى الشكل أصغر أو يساوي ≤ بضرب طرفيها في (-1)؛
- فيما يخص القيود التي هي في شكل معادلات فلا تحول، و بما أن القيد في النموذج الأصلي يقابله متغير في النموذج الثنائي فننتظر أن تكون المتغيرات غير مقيدة، أي أنه من الممكن أن تكون موجبة، كما يمكن أن تكون سالبة؛
- حل النموذج الأصلي والنموذج الثنائي متطابقان.

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$Min(z) = 4X_1+5X_2+3X_3$
St:
$2X_1+3X_2+4X_3 \leq 2500$
$X_1+X_2+X_3 \geq 750$
$X_1 \geq 250$
$X_2=300$
$X_1,X_2,X_3 \geq 0$

المطلوب: أوجد النموذج الثنائي للنموذج الأصلي ؟

الحل:

إيجاد النموذج الثنائي للنموذج الأصلي:

تحول دالة الهدف إلى الشكل Max بضرب دالة الهدف في (1−)، كما تحول القيود التي هي من الشكل أكبر ≤ أو يساوي إلى الشكل أقل أو يساوي ≥ بضرب طرفي القيدين الثاني والثالث في (1−)، فيصبح النمـــوذج الأصلي كالتالي:

$Max(-Z) = -4X_1-5X_2-3X_3$
St:
$2X_1+3X_2+4X_3 \leq 2500$
$-X_1-X_2-X_3 \leq -750$
$-X_1 \leq -250$
$X_2=300$
$X_1,X_2,X_3 \geq 0$

ومنه النموذج الثنائي المرادف هو:

$Min(W)= 2500Y_1 -750Y_2 - 250Y_3+300Y_4$
St:
$2Y_1-Y_2-Y_3+0Y_4 \geq -4$
$3Y_1-Y_2+0Y_3+Y_4 \geq -5$
$4Y_1-Y_2+0Y_3+0Y_4 \geq -3$
$Y_1,Y_2,Y_3 \geq 0$ / $Y_4 \neq 0$: غير مقيد

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$Max(z) = 8X_1+4X_2$
St:
$4X_1+5X_2 \geq 20$
$X_2 \leq 5$
$X_1+3X_2 \geq 10$
$X_1,X_2 \geq 0$

المطلوب: أوجد النموذج الثنائي للنموذج الأصلي؟

الحل:

النموذج الأصلي ذو صيغة عامة (مختلطة) أي يحتوي على مزيج من المتراجحات من النوع (≥،≤)، وبالتالي يتم تحويله إلى صيغة قانونية أي في حالة دالة الهدف من الشكل Max يجب أن تكون كل قيوده من

النوع أقل أو يساوي ومنه نضرب طرفي المتراجحات أكبر أو يساوي (الأولى والثالثة) في الإشارة (−) لتصبح القيود من الشكل أقل أو يساوي كما يلي:

$-4X_1-5X_2\leq -20$
$-X_1-3X_2\leq -10$

وعليه يصبح النموذج الأصلي:

$Max(z) = 8X_1+4X_2$
St:
$-4X_1-5X_2\leq -20$
$X_2\leq 5$
$-X_1-3X_2\leq -10$
$X_1,X_2\geq 0$

ومنه يكون النموذج الثنائي كالتالي:

$Min(W) = -20Y_1+5Y_2-10Y_3$
St:
$-4Y_1+0Y_2-Y_3\geq 8$
$-5Y_1+Y_2-3Y_3\geq 4$
$Y_1,Y_2,Y_3\geq 0$

3.علاقة النموذج الأصلي بالنموذج الثنائي:

- إذا كان يوجد حل أمثل للنموذج الأصلي فإنه بالضرورة يوجد حل أمثل للنموذج الثنائي؛
- هدف الأصلية z = هدف الثنائية $\boldsymbol{W}$؛
- مسائل Max للنموذج الأصلي قيمة الهدف $(\boldsymbol{z})$ تكون في تزايد من جدول لآخر وصولا إلى الحل الأمثل بينما النموذج الثنائي له فقيمة الهدف $(\boldsymbol{W})$ تكون في تناقص من جدول لآخر وصولا إلى الحل الأمثل؛
- لكل من النموذجين الأصلي والثنائي حل عملي يتجلى في عمود الموارد أي شرط العملية موجب؛
- يمكن إيجاد قيم المتغيرات القرارية للنموذج الأصلي من الحل للنموذج الثنائي مباشرة والعكس صحيح، وهذا بالعلاقة التالية:

[الفرق بين الطرف الأيمن والأيسر لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للنموذج الأصلي] = [عناصر السطر z لمصفوفة المتغيرات الأساسية للنموذح الأصلي]

4.كيفية استنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي من خلال الحل الأمثل للنموذج الأصلي

ليكن النموذج الخطي التالي:

$MAX(Z) = 2X_1+3X_2$
St:
$7X_1+4X_2\leq 28$
$4X_1+5X_2\leq 20$
$X_2\leq 3$
$X_1,X_2\geq 0$

جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي هو كالتالي:

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	0	0	1	-7/4	19/4	29/4
X_1	1	0	0	1/4	-5/4	5/4
X_2	0	1	0	0	1	3
Z	0	0	0	1/2	1/2	46/4

النموذج الثنائي المرافق للنموذج الأصلي هو كالتالي:

$Min(W)=28Y_1+20Y_2+3Y_3$
St:
$7Y_1+4Y_2+0Y_3\geq 2$
$4Y_1+5Y_2+Y_3\geq 3$
$Y_1,Y_2,Y_3\geq 0$

الشكل المعياري للنموذج الثنائي هو:

$Min(W)=28Y_1+20Y_2+3Y_3+MR_1+MR_2$
St:
$7Y_1+4Y_2+0Y_3-S_1+R_1=2$
$4Y_1+5Y_2+Y_3-S_2+R_2=3$
$Y_1,Y_2,Y_3,S_1,S_2,R_1,R_2\geq 0$

نلاحظ من خلال عمود الأساس لجدول الحل للنموذج الأصلي بأن:

المتغيرات X_1 و X_2 موجودة فيه بقيم موجبة، وبالتالي فالمتغيرات المكملة لها هي علـــى التـــوالي: R_3 وR_2 تكون قيمتها معدومة أي: $R_3=0$، $R_2=0$

$S_1=29/4$: وبما أن المتغير المكمل له وهو Y_1 في نفس العمود وفي السطر Z، ومنه نستنتج أن: $Y_1=0$.

$S_2=0$: وبما أن المتغير المكمل له وهو Y_2 في نفس العمود وفي السطر Z، ومنه نستنتج أن: $Y_2=1/2$.

$S_3=0$: وبما أن المتغير المكمل له وهو Y_3 في نفس العمود وفي السطر Z، ومنه نستنتج أن: $Y_3=1/2$.

5. المعنى الإقتصادي لمتغيرات النموذج الثنائي:

$Y_1=0$: أي أن الحل الأمثل يتطلب عدم استغلال كل الطاقة المتوفرة في القيد الأول، كما أن أي زيادة بمقدار وحدة واحدة من هذه الطاقة (الطرف الأيمن للقيد الأول) لا يؤدي إلى أي تغير في قيمة دالة الهدف (Z).

$Y_2=1/2$: أي أن الحل الأمثل يتطلب استغلال كل الطاقة المتوفرة في القيد الثاني، كما أن أي زيادة بمقـــدار وحدة واحدة من هذه الطاقة (الطرف الأيمن للقيد الثاني) يؤدي إلى الزيادة في قيمة دالة الهـــدف (Z) بـــــ: **1/2** وحدة نقدية.

$Y_3=1/2$: أي أن الحل الأمثل يتطلب استغلال كل الطاقة المتوفرة في القيد الثالث، كما أن أي زيادة بمقـــدار وحدة واحدة من هذه الطاقة (الطرف الأيمن للقيد الثالث) يؤدي إلى الزيادة في قيمة دالة الهـــدف (Z) بــــ : **1/2** وحدة نقدية.

6. التفسير الإقتصادي للنموذج الثنائي (للثنائية):

بالنسبة للمثال السابق لدينا:

النموذج الثنائي	النموذج الأصلي
$Min(W)=28Y_1+20Y_2+3Y_3+MR_1+MR_2$ $St:$ $7Y_1+4Y_2+0Y_3-S_1+R_1=2$ $4Y_1+5Y_2+Y_3-S_2+R_2=3$ $Y_1,Y_2,Y_3,S_1,S_2,R_1,R_2\geq 0$	$MAX(Z) = 2X_1+3X_2$ $St:$ $7X_1+4X_2\leq 28$ $4X_1+5X_2 \leq 20$ $X_2\leq 3$ $X_1,X_2\geq 0$

يوضح النموذج الأصلي أن المصنع A ينتج نوعين من المنتجات، حيث:

X_1: عدد الوحدات اللازم إنتاجها من النوع الأول.

X_2: عدد الوحدات اللازم إنتاجها من النوع الثاني.

كما أن هدف المصنع هو تعظيم أرباحه الإجمالية $MAX(Z)$ نتيجة لإنتاجه وتسويقه لكميات معينة من المنتجين.

وعليه المشكلة الإنتاجية موضوع البرمجة الخطية هي البحث عن عدد الوحدات اللازم إنتاجها من طرف المصنع من النوعين X_2،X_1 لتعظيم الربح من خلال استغلال الكميات المتاحة من الموارد.

وبالتالي:

- دالة الهدف توضح الأرباح الوحدوية من النوعين X_2،X_1 .
- القيود تمثل الكميات المتاحة لإنتاج وحدة واحدة من كل نوع X،X_1 ، حيث أن الطاقة القصوى من الموارد الثلاثة هي: 28، 20، 3 على التوالي.
- شرط عدم السلبية: أي كمية المنتوجات موجبة أو معدومة.

نلاحظ في النموذج الثنائي نفس أرقام النموذج الأصلي لكن التفسير بشكل معاكس كما يلي:

لنفترض أن هناك مصنع آخر وهو المصنع B لاحظ أن المصنع A يمر بظروف خاصة، فقرر شراء إجمالي الكميات المتاحة من الموارد الثلاثة منه، بلا شك أن المصنع A سيقبل العرض لبيع أو تأجير طاقاته الإنتاجية للمصنع B خاصة إذا كان السعر المقترح من طرف هذا الأخير سيسمح للمصنع الأصلي بالحصول على نفس قيمة الربح الإجمالي الذي كان يتحصل عليه عند قيامه بعملية الإنتاج بنفسه.

وبالتالي:

- هدف المصنع B يتمثل في تخفيض تكلفة الإستئجار $\boldsymbol{Min(W)}$؛
- قيم Y_i تمثل تكلفة إستئجار الموارد الثلاثة (وحدة نقدية)
- القيود توضح أن قيمة إستئجار الموارد الثلاثة لصنع وحدة واحدة من $\boldsymbol{Y_1,Y_2,Y_3}$ أكبر أو يساوي من الربح الوحدوي المتحصل عليه من X_1,X_2.
- شرط عدم السلبية: أي قيمة التأجير أكبر أو يساوي الصفر.

7.طريقة السمبلكس للثنائية

طريقة السمبلكس للثنائية هي ليست طريقة لحل النموذج الثنائي فقط، وإنما تستعمل في حالات خاصة وتختلف عن طريقة السمبلكس العادية (المبسطة) من حيث دواعي الإستخدام، حيث هذه الأخيرة تستخدم إذا كان شرط العملية محقق وشرط الأمثلية غير محقق، غير أنه أثناء الحل بهذه الطريقة قد تظهر حالات تخالف شرط العملية وشرط الأمثلية، وفي حالة ظهور هذه الحالة أي: (عدم تحقيق شرط العملية بينما شرط الأمثلية محقق)، فإنه يمكن مواصلة الحل (لنفس البرنامج) بطريقة خاصة تسمى: **طريقة السمبلكس للثنائية** والتي تنطلق من فكرة مفادها أن شرط العملية غير محقق وشرط الأمثلية محقق سواء كانت دالة الهدف للنموذج من الشكل $\boldsymbol{MAX}$ أو $\boldsymbol{Min}$.

وعليه قبل استخدام هذه الطريقة، فإن الأمر يستدعي التأكد من عدم تحقق شرط العملية وتحقــق شــرط الأمثلية، حيث:

- **شرط الأمثلية يكون محقق:** عندما تكون جميع عناصر السطر Z أكبر أو تساوي 0 في حالة $\boldsymbol{MAX}$، وأقل أو تساوي الصفر في حالة $\boldsymbol{Min}$.
- **شرط العملية يكون غير محقق:** أي وجود قيم سالبة في عمود الموارد سواء البرنامج من الشكل $\boldsymbol{MAX}$ أو $\boldsymbol{Min}$.

بعد التأكد من توفر شروط استخدام طريقة السمبلكس للثنائية فإنه يمكن مواصلة الحل والإنتقال إلى:

- **تحديد المتغير الخارج (سطر الدوران):** يكون على أساس أكبر قيمة مسبوقة بإشارة سالبة $(-)$ في عمود الموارد في حالة $\boldsymbol{MAX}$ أو $\boldsymbol{Min}$.
- **تحديد المتغير الداخل (عمود الدوران):** يكون وفق العلاقة او الشروط التالية:

نقوم بقسمة عناصر السطر Z على عناصر سطر الدوران المقابلة لها ذات الإشارة السالبة فقط، في حالــة البرنامج من الشكل $\boldsymbol{Min}$ يتم اختيار عمود الدوران على أساس أقل ناتج قسمة موجب، أمــا فــي حالــة البرنامج من الشكل $\boldsymbol{MAX}$ يتم اختيار عمود الدوران على أساس أكبر ناتج قسمة مسبوق بإشارة سالبة.

- **تحديد عنصر الدوران:** الذي يكون سالب دائما.

بعد تعيين عنصر الدوران، يتم الانتقال إلى الجدول الموالي متبعين نفس الإجراءات أو الخطوات المتبعة في طريقة السمبلكس العادية؛ حيث يتم الحصول على الحل الأمثل عندما لا يبقى أي عنصر سالب في عمــود الموارد في الجدول السمبلكس سواء في حالة $\boldsymbol{MAX}$ أو $\boldsymbol{Min}$.

مثال:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$Min\ (z)=2X_1+X_2$$
$$St$$
$$3X_1+X_2\geq 3$$
$$4X_1+3X_2\geq 6$$
$$X_1+2X_2\leq 3$$
$$X_1,X_2\geq 0$$

أ. **الخطوة الأولى:** تتمثل في جعل كل القيود من النوع أقل أو يساوي، وبما أن القيدين الأول والثاني في البرنامج من النوع أكبر أو يساوي ومن أجل جعلهما من النوع أقل أو يساوي، فإن هذا يتطلب ضرب طرفي القيدين في إشارة الناقص (−)، فنجد:

$-3X_1-X_2 \leq -3$
$-4X_1-3X_2 \leq -6$
$X_1+2X_2 \leq 3$
$X_1,X_2 \geq 0$

أ. **الخطوة الثانية:** تحويل النموذج النموذج الأصلي إلى الشكل المعياري:

$Min(z)=2x_1+x_2$
St
$-3X_1-X_2+S_1=-3$
$-4X_1-3X_2+S_2=-6$
$X_1+2X_2+S_3=3$
$X_1,X_2,S_1,S_2,S_3 \geq 0$

ب. **الخطوة الثالثة:** إعداد جدول السمبلكس للحل الأولي T_0:

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	-3	-1	1	0	0	-3
S_2	4	-3	0	1	0	-6
S_3	1	2	0	0	1	3
Z	-2	-1	0	0	0	0

نلاحظ من خلال الجدول T_0 أن شرط الأمثلية محقق (كل عناصر السطر Z أقل أو تساوي الصفر) في حالة Min؛ وشرط العملية غير محقق (وجود قيم سالبة في عمود الموارد)، ومنه يتم الإنتقال إلى جدول السمبلكس الثاني T_1، ومواصلة الحل باستخدام طريقة السمبلكس للثنائية حتى الوصول إلى الحل الأمثل (تحقق شرطي الأمثلية والعملية معا).

ت. **الخطوة الرابعة:** إعداد جدول السمبلكس للحل الثاني T_1:

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
S_3	5/3	0	0	2/3	1	-1
Z	-2/3	0	0	-1/3	0	2

نلاحظ أن من خلال الجدول T_1 أن شرط الأمثلية محقق وشطر العملية غير محقق ومنه يتم الإنتقال إلى جدول السمبلكس T_2 بإستخدام طريقة السمبلكس للثنائية.

ث. **الخطوة الخامسة:** إعداد جدول السمبلكس للحل الثالث T_2:

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
X_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
X_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
S_3	0	0	-1	1	1	0
Z	0	0	-2/5	-1/5	0	12/5

من خلال الجدول T_2 نلاحظ أن شرطي العملية والأمثلية محققين ومنه هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل حيث:

$X_1=3/5$
$X_2=6/5$
$Z=12/5$.

ملاحظة: يمكن الإنتقال من الحل بطريقة السمبلكس للثنائية إلى طريقة السـمبلكس العاديـة فـي نفـس النموذج.

الفـصـــــل الثالث:

تحليل الحساسية

(تحليل ما بعد الأمثلية)

الفصل الثالث: تحليل الحساسية (تحليل ما بعد الأمثلية)

I. تعريف تحليل الحساسية:

يقصد بتحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الأمثلية دراسة أثر التغيرات التي قد تحدث على المعطيات التي تم على أساسها إشتقاق النموذج الأصلي، وذلك بالإعتماد على جدول الحل الأمثل لهذا الأخير، ومعرفة أثر هذه التغيرات على الحل الأمثل مباشرة، أي دون اللجوء إلى إعادة حل النموذج من البداية لأن العملية مجهدة وتتطلب حسابات مكررة مما يؤدي إلى حدوث بعض الأخطاء في الحسابات بسبب كثرتها، وعليه لتجاوز هذه الحالة يتم اللجوء إلى استخدام ما يسمي بتحليل الحساسية أو تحليل ما بعد الأمثلية.

II. حالات تحليل الحساسية:

إن التغيرات التي قد تحدث على النموذج الأصلي، والتي تعتبر موضوع تحليل الحساسية يمكن أن تكون:

- على معاملات دالة الهدف (c_i)؛
- على قيم الطرف الأيمن للقيود (الكميات المتاحة)؛
- على معاملات المتغيرات القرارية في القيود (a_{ij})؛
- إخراج متغير من البرنامج؛
- إخراج قيد من البرنامج.

إن لهذه التغيرات تأثيرات على شرطي العملية والأمثلية، وذلك كما يلي:

<u>تغيرات لها تأثيرات على العملية</u>: وتكون:

- تغيرات في الطرف الأيمن من القيود؛
- إضافة قيد جديد.

<u>تغيرات لها تأثيرات على الأمثلية</u>: وتكون:

- تغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف؛
- إضافة نشاط (متغير قراري) جديد.

بالنسبة للنتائج التي يمكن أن تحدث على الحل الأمثل من التغيرات أعلاه هي:

- أن الحل الأمثل يمكن أن يبقى كما هو بدون تغيير (قيمة دالة الهدف Z وقيمة المتغيرات ثابتة)؛
- قد يبقى الحل الأمثل (قيمة دالة الهدف Z) كما هي ولكن قد تتغير قيمة المتغيرات بعضها أو كلها؛
- قد يتغير الحل الأمثل بأكمله.

مثال1: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$MAX(Z) = 2X_1+3X_2$

St:

$7X_1+4X_2\leq 28$

$4X_1+5X_2 \leq 20$

$X_2\leq 3$

$X_1,X_2\geq 0$

جدول الحل الأمثل للبرنامج الأصلي هو كالتالي:

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	0	0	1	-7/4	19/4	29/4
X_1	1	0	0	1/4	-5/4	5/4
X_2	0	1	0	0	1	3
Z	0	0	0	1/2	1/2	46/4

المطلوب: إفترض التغيرات التالية:

1. تغيرات في الطرف الأيمن للقيود:

أ. إفترض حدوث تغير في الطرف الأيمن للقيد الثاني من 20 إلى 22.

ب. إفترض حدوث تغير في الطرف الأيمن للقيد الثاني والقيد الثالث من 20 إلى 22 ومن 3 إلـــى 5 على التوالي.

2. إضافة قيد جديد:

أ. إفترض إضافة القيد التالي: $X_2 \leq 4$

ب. إفترض إضافة القيد التالي: $X_2 \leq 2$

ت. إفترض إضافة القيد التالي: $X_1+2X_2 \leq 4$

3. تغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف: إفترض أن دالة الهدف تغيرت إلى: $Max(z)=3X_1+5X_2$

4. إضافة نشاط (متغير قراري) جديد X_3:

لنفترض أنه حدث تغير في البرنامج الأصلي كالتالي:

$Max(z)=2X_1+3X_2+2X_3$

St:

$7X_1+4X_2+X_3 \leq 28$

$4X_1+5X_2+2X_3 \leq 20$

$X_2-X_3 \leq 3$

$X_1,X_2,X_3 \geq 0$

المطلوب: ما هو تأثير هذه التغيرات على الحل الأمثل في كل حالة؟

الحل:

1. تغيرات في الطرف الأيمن للقيود:

أ. في حالة حدوث تغير في الطرف الأيمن للقيد الثاني من 20 إلى 22:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 22 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28(1)+22(-7/4)+3(19/4) \\ 28(0)+22(1/4)+3(-5/4) \\ 28(0)+22(0)+3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 7/4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن قيم عمود الموارد بقيت موجبة، أي أن شرط العملية لم يتأثر، غير أن قيم الحل الأمثل تغيرت إلى:

$X_1=7/4 \qquad X_2=3 \qquad Z=2(7/4)+3(3)=50/4$

ب. في حالة حدوث تغير في الطرف الأيمن للقيد الثاني والقيد الثالث من 20 إلى 22 ومن 3 إلى 5 على التوالي:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 28 \\ 22 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28(1)+22(-7/4)+5(19/4) \\ 28(0)+22(1/4)+5(-5/4) \\ 28(0)+22(0)+5(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53/4 \\ -3/4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

نلاحظ من خلال قيم عمود الموارد بعد التغيرات التي طرأت على الطرف الأيمن للقيدين الثاني والثالث ظهور قيم سالبة، أي تأثر الحل الأمثل الحالي. وعليه نستخدم طريقة السمبلكس للثنائية ونواصل الحل لإيجاد الحل الأمثل الجديد.

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	0	0	1	-7/4	19/4	**53/4**
X_1	1	0	0	1/4	-5/4	**-3/4**
X_2	0	1	0	0	1	**5**
Z	0	0	0	1/2	1/2	**54/4**

ومنه الجدول الموالي هو:

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	-19/5	0	1	- 4/5	0	52/5
S_3	- 4/5	0	0	-1/5	1	3/5
X_2	4/5	1	0	1/5	0	22/5
Z	**2/5**	**0**	**0**	**3/5**	**0**	**66/5**

نلاحظ أن شرطي الأمثلية والعملية محققين ومنه الحل الأمثل هو:

$X_1=0,\ X_2=22/5,\ Z=66/5$

2. إضافة قيد جديد:

أ. في حالة إضافة القيد التالي: $X_2 \leq 4$

نلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل أن قيمة $X_2=3$ وهي أقل من 4، هذا يعني أن القيد الذي تمت إضافته محقق، أي أنه محتوى في الحل الحالي، وعليه فهو لا يؤثر في الحل الأمثل.

ب. في حالة إضافة القيد التالي: $X_2 \leq 2$

نلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل أن قيمة $X_2=3$ وهي أكبر من 2، هذا يعني أن القيد الذي تمت إضافته غير محقق، أي أنه غير محتوى في الحل الحالي، وعليه فهو يؤثر في الحل الأمثل.

يتم تحويل القيد المضاف إلى الشكل المعياري:

$$X_2+S_4=2$$

ثم نبحث عن قيمته بدلالة المتغيرات القرارية X_1 و X_2 في الحل الأمثل الحالي.

ثم نقوم بالتعويض بقيمتي X_1 و X_2 بما يساويه في الحل الأمثل الحالي، في الشكل المعياري للقيد المضاف بحيث يكون:

$X_1+0X_2+1/4S_2-5/4S_3=5/4$

$\longrightarrow X_1=5/4-1/4S_2+5/4S_3$

$0X_1+X_2+S_3=3 \longrightarrow X_2=3-S_3$

نعوض بعبارتي X_1 و X_2 في الشكل المعياري للقيد المضاف:

$$-S_3+S_4=-1$$

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	عمود الموارد
S_1	0	0	1	-7/4	19/4	0	29/4
X_1	1	0	0	1/4	-5/4	0	5/4
X_2	0	1	0	0	1	0	3
S_4	0	0	0	0	-1	1	-1
Z	**0**	**0**	**0**	**1/2**	**1/2**	**0**	**46/4**

باستخدام طريقة السمبلكس للثنائية نواصل الحل لإيجاد الحل الأمثل الجديد.

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	عمود الموارد
S_1	0	0	1	-7/4	0	19/4	10/4
X_1	1	0	0	1/4	0	-5/4	10/4
X_2	0	1	0	0	0	1	2
S_3	0	0	0	0	1	-1	1
Z	0	0	0	0	0	1/2	11

نلاحظ أن شرطي الأمثلية والعملية محققين ومنه الحل الأمثل هو:

$\mathbf{X_1=10/4,\ X_2=2,\ Z=11.}$

ت. في حالة إضافة القيد التالي: $X_1+2X_2\leq 4$

من جدول الحل الأمثل نلاحظ أن: $X_1+2X_2=5/4+2(3)= 4/29$

وأن القيد الحالي يشترط أن يكون: $X_1+2X_2\leq 4$

وهذا يعني أن المضاف غير محتوى في الحل الحالي، وعليه فهو يؤثر في الحل الأمثل.

يتم تحويل القيد المضاف إلى الشكل المعياري:

$$X_1+2X_2+S_4=4$$

ثم نبحث عن قيمته بدلالة المتغيرات القرارية X_1 و X_2 في الحل الأمثل الحالي.

ثم نقوم بالتعويض بقيمتي X_1 و X_2 بما يساويه في الحل الأمثل الحالي، في الشكل المعياري للقيد المضاف بحيث يكون:

$$X_1+0X_2+1/4S_2-5/4S_3=5/4 \longrightarrow X_1=5/4-1/4S_2+5/4S_3$$

$$0X_1+X_2+S_3=3 \longrightarrow X_2=3-S_3$$

نعوض بعبارتي X_1 و X_2 في الشكل المعياري للقيد المضاف:

$$5/4-1/4S_2+5/4S_3+\mathbf{2(3-}S_3\mathbf{)}+S_4\mathbf{=4}$$

$$\longrightarrow 5/4-1/4S_2+5/4S_3\mathbf{+6-2}\,S_3+S_4\mathbf{=4}$$

$$\longrightarrow \mathbf{-1/4}\,S_2\mathbf{-3/4}\,S_3+S_4\mathbf{=-13/4}$$

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	عمود الموارد
S_1	0	0	1	-7/4	19/4	0	**29/4**
X_1	1	0	0	1/4	-5/4	0	**5/4**
X_2	0	1	0	0	1	0	**3**
S_4	0	0	0	-1/4	-3/4	1	**-13/4**
Z	0	0	0	1/2	1/2	0	**46/4**

نلاحظ ظهور قيم سالبة في عمود الموارد، وعليه باستخدام طريقة السمبلكس للثنائية نواصل الحل لإيجاد الحل الأمثل الجديد.

3. تغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف:

بإفترض أن دالة الهدف تغيرت إلى: $Max(z)=3X_1+5X_2$

التغير هنا شمل معاملي X_1 و X_2 معا.

تتيح لنا العلاقة بين الأصلية والثنائية إمكانية إيجاد قيم متغيرات الثنائية إنطلاقا من الحل الأمثل للأصلية والعكس صحيح.

وعليه نقوم بحساب متغيرات الثنائية من الحل الأمثل للأصلية، لكن بإستخدام معاملات متغيرات دالة الهدف الجديدة.

$$(Y_1,Y_2,Y_3) = \underset{S_1,\, X_1,\, X_2}{(0.\ 3\ .\ 5)} \begin{bmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,3/4,5/4)$$

$Y_1 = 0 \qquad Y_2=3/4 \qquad Y_3=5/4$

يتم الآن حساب معاملات السطر **Z** بعد إدخال التغيرات الجديدة من خلال: الفرق بين الطرف الأيمن والأيسر لقيود الثنائية المشاركة مع متغيرات الأصلية.

X_1: $7Y_1+4Y_2-3=7(0)+4(3/4)-3=\mathbf{0}$

X_2: $4Y_1+5Y_2+Y_3-5=4(0)+5(3/4)+5/4-5=\mathbf{0}$

S_1: $Y_1-0=0-0=\mathbf{0}$

S_2: $Y_2-0=3/4-0=\mathbf{3/4}$

S_3: $Y_3-0=5/4-0=\mathbf{5/4}$

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	0	0	1	-7/4	19/4	29/4
X_1	1	0	0	1/4	-5/4	5/4
X_2	0	1	0	0	1	3
Z	**0**	**0**	**0**	**3/4**	**5/4**	**75/4**

نلاحظ من خلال قيم السطر Z الجديدة أنها بقيت موجبة مما يعني أن الحل الحالي هو حل أمثل حيث:

$X_1=5/4 \qquad X_2=3 \qquad Z=75/4$

ملاحظة: في حالة ما ظهرت قيم السطر Z الجديدة بقيم سالبة (حتى ولو كانت القيم السالبة في متغيرات الأصلية) فإن شرط الأمثلية يصبح غير محقق، وبالتالي نستخدم طريقة السمبلكس العادية ونواصل الحل لإيجاد الحل الأمثل.

4. إضافة نشاط (متغير قراري) جديد X_3:

لنفترض أنه حدث تغير في البرنامج الأصلي كالتالي:

$Max(z)=2X_1+3X_2+2X_3$

***St*:**

$7X_1+4X_2+X_3\leq 28$

$4X_1+5X_2+2X_3\leq 20$

$X_2-X_3\leq 3$

$X_1,X_2,X_3\geq 0$

في البداية يتم إيجاد قيد الثنائية المشارك مع X_3 حيث حسب المتغير الجديد فإن قيد الثنائية يصبح:

$Y_1+2Y_2-Y_3\geq 2$

ثم إيجاد قيمة X_3 في السطر **Z** في جدول الحل الأمثل، ويتطلب ذلك إيجاد قيم متغيرات الثنائية أولا:

$Y_1-0=0 \Longrightarrow Y_1=0$

$Y_2-0=1/2 \Longrightarrow Y_2=1/2$

$Y_3-0=1/2 \Longrightarrow Y_3=1/2$

بالتعويض في قيد الثنائية المشارك مع X_3 نجد:

$1(0)+2(1/2)-1(1/2)-2=-3/2.$

ثم حساب قيم العمود في جدول الحل الأمثل وذلك كما يلي:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1)+2(-7/4)-1(19/4) \\ 1(0)+2(1/4)-1(-5/4) \\ 1(0)+2(0)-1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29/4 \\ 7/4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	0	0	-29/4	1	-7/4	19/4	29/4
X_1	1	0	7/4	0	1/4	-5/4	5/4
X_2	0	1	-1	0	0	1	3
Z	0	0	-3/2	0	1/2	1/2	46/4

نلاحظ ظهور قيم سالبة في السطر **Z**، وعليه نواصل الحل بإستخدام طريقة السمبلكس المبسطة لإيجاد الحل الأمثل الجديد:

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	29/7	0	0	0	-5/7	-3/7	51/4
X_3	4/7	0	1	0	1/7	-5/7	5/7
X_2	4/7	1	0	0	1/7	2/7	26/7
Z	**6/7**	**0**	**0**	**0**	**5/7**	**-4/7**	**88/7**

نلاحظ ظهور قيم سالبة في السطر *Z*، وعليه نواصل الحل بإستخدام طريقة السمبلكس المبسطة بالإنتقال إلى الجدول الموالي .

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	5	3/2	0	0	-1/2	0	513/28
X_3	2	5/2	1	0	1/2	0	10
S_3	2	7/2	0	0	1/2	1	13
Z	2	2	0	0	1	0	20

شرطي الأمثلية والعملية محققين في الجدول أعلاه، ومنه الحل الأمثل الجديد هو:

$$X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=10,\ Z=20$$

مثال2:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$MAX(Z) = 5X_1+20X_2+25X_3$
St:
$2X_1+X_2\leq 40$
$2X_1+2X_3\leq 30$
$2X_2-1/2X_3\leq 15$
$X_1,X_2\geq 0$

جدول الحل الأمثل معطى كالتالي:

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	3/2	0	0	1	-1/8	-1/2	115/4
X_3	1	0	1	0	1/2	0	15
X_2	1/4	1	0	0	1/8	1/2	45/4
Z	25	0	0	0	15	10	600

المطلوب:

1. حدد مجال التغير(Δ) لمعاملات دالة الهدف والتي تبقي الحل الحالي حل أمثل؟
2. حدد مجال التغير (Δ) للطرف الأيمن (الثاني) من القيود والتي تبقي الحل الحالي حل عملي؟
3. ما تأثير إسقاط (إخراج) القيد الأول من البرنامج الخطي على الحل الأمثل؟
4. ما تأثيرإسقاط (إخراج) القيد الثالث من البرنامج الخطي على الحل الأمثل؟
5. ما هو تأثير إخراج المتغير X_1 من البرنامج الخطي على الحل الأمثل؟
6. ما هو تأثير إخراج المتغير X_2 من البرنامج الخطي على الحل الأمثل؟
7. لنفترض أنه حدث تغير في معاملات المتغير X_1 في الطرف الأيسر للقيود حيث أصبح البرنامج الخطي كالأتي:

$MAX(Z) = 5X_1+20X_2+25X_3$
St:
$4X_1+X_2\leq 40$
$3X_1+2X_3\leq 30$
$X_2-1/2X_3\leq 15$
$X_1,X_2\geq 0$

- ما هو تأثير التغير في معاملات المتغير X_1 في الطرف الأيسر للقيود في البرنامج على الحل الأمثل؟

8. لنفترض أنه حدث تغير في معاملات المتغير X_2 في الطرف الأيسر للقيود حيث أصبح البرنامج الخطي كالأتي:

$MAX(Z) = 5X_1+20X_2+25X_3$
St:
$2X_1+2X_2\leq 40$
$2X_1+2X_3\leq 30$
$X_2-1/2X_3\leq 15$
$X_1,X_2\geq 0$

- ما هو تأثير التغير في معاملات المتغير X_2 في الطرف الأيسر للقيود في البرنامج على الحل الأمثل؟

الحل:

1. تحديد مجال التغير لمعاملات دالة الهدف والتي تبقي الحل الحالي حل أمثل:

لمعرفة مقدار التغير (Δ الزيادة أو التخفيض) المسموح به لمعاملات دالة الهدف (الأرباح الوحدوية) لـــ X_1,X_2,X_3 بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتا، هناك حالتيين وهما:

- حالة عدم وجود المتغيرات في الحل الأمثل (X_1)؛
- حالة وجود المتغيرات في الحل الأمثل (X_2,X_3).

أ. تحديد مجال التغير لمعاملات المتغيرات التي لم تظهر في الحل الأمثل (X_1):

يلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل السابق أن X_1 غير موجود في تشكيلة الأساس في جدول الحل الأمثل، أي أن قيمته تساوي 0. وبالتالي حتى يتم إنتاج وحدات من X_1 (X_1 يدخل تشكيلة الأساس في جدول الحل الأمثل)، فإنه يجب أن يكون أدنى ربح وحدوي لـــ X_1 هو: الربح الوحدي السابق (5) + التأثير الوحدوي المقابل لـــ X_1 في السطر Z (25) أي: 5+25=30 دج.

وبالتالي لو نعيد الحل للنموذج السابق بحيث معامل X_1 في دالة الهدف هو 30 دج أو اكثر، سيدخل X_1 تشكيلة الأساس في جدول الحل الأمثل.

ب. تحديد مجال التغير لمعاملات المتغيرات التي تظهر في الحل الأمثل (X_2,X_3):

لمعرفة مقدار التغير (Δ) المسموح به في معاملات دالة الهدف (الأرباح الوحدوية) للمتغيرين (X_2,X_3) لأنهما موجودتان في تشكيلة الأساس لجدول الحل الأمثل، نتبع ما يلي:

- نسجل عناصر السطر المقابل للمتغير Xi من جدول الحل الأمثل أفقيا؛
- نسجل عناصر السطر Z لجدول الحل الأمثل أفقيا؛
- نستنتج المتراجحات؛
- نحدد مقدار التغير (Δ_i)؛
- نحدد مجال التغير المسموح به لمعامل الهدف (الربح الوحدوي) للمتغير Xi والذي يسمح ببقاء الحل الحالي حل أمثل.

بالنسبة لمجال التغير المسموح به لمعامل الهدف الثاني (الربح الوحدوي لـــ X_2)، والذي يبقي الحل الحالي حل أمثل يمكن تحديده كالتالي:

$(\Delta_2)\,X_2$	1/4	1	0	0	1/8	1/2
Z	25	0	0	0	15	10

للمحافظة على شرط الأمثلية في حالة Max يجب أن تكون جميع عناصر السطر Z أكبر أو يساوي 0، وعليه إشارة المتراجحات تكون من الشكل أكبر أو يساوي 0.

ملاحظة: في حالة Min إشارة المتراجحات تكون من الشكل أقل أو يساوي 0؛ لأنه من أجل المحافظة على شرط الأمثلية يجب أن تكون جميع عناصر السطر Z أقل أو يساوي 0.

وعليه المتراجحات هي كالتالي:

$25+1/4\Delta_2 \geq 0 \longrightarrow \Delta_2 \geq -60$
$0+\Delta_2 \geq 0 \longrightarrow \Delta_2 \geq 0$
$15+1/8\Delta_2 \geq 0 \longrightarrow \Delta_2 \geq -120$
$10+1/2\Delta_2 \geq 0 \longrightarrow \Delta_2 \geq -20$

ومنه: $0 \leq \Delta_2$ أي: $\Delta_2 \in [0, +\infty[$

وعليه مجال التغير المسموح به لمعامل الهدف الثاني (الربح الوحدوي لـــ X_2) هو [20+∞+,20+0]، أي أن تغير الربح الوحدوي لـــ X_2 من 20 إلى ∞+ يسمح ببقاء الحل الأمثل ثابتا.

بالنسبة لمجال التغير المسموح به لمعامل الهدف الثالث (الربح الوحدوي لـــ X_3، والذي يبقي الحل الحالي حل أمثل يمكن كذلك تحديد كالتالي:

Δ_3 (X_3)	*1*	*0*	*1*	*0*	*1/2*	*0*
Z	***25***	***0***	***0***	***0***	***15***	***10***

المتراجحات هي كالتالي:

$25+\Delta_3 \geq 0 \longrightarrow \Delta_3 \geq -25$
$0+\Delta_3 \geq 0 \longrightarrow \Delta_3 \geq 0$
$15+\Delta_3 \geq 0 \longrightarrow \Delta_3 \geq -15$

ومنه: $\Delta_3 \geq 0$ أي: $\Delta_3 \in [0, +\infty[$

وعليه مجال التغير المسموح به لمعامل الهدف الثالث (الربح الوحدوي لـــ X_3) هو [25+∞+,25+0]، أي أن تغير البرح الوحدوي لـــ X_3 من 25 إلى ∞+ يسمح ببقاء الحل الأمثل ثابتا.

2. تحديد مجال التغير (Δ) للطرف الأيمن (الكمية المتاحة) للقيود والتي تبقي الحل الحالي حل عملي:

لمعرفة مقدار التغير (Δ الزيادة أو التخفيض) المسموح به للطرف الأيمن للقيود (***b_j***) والتي تبقي الحل الحالي حل عملي (أو حل أمثل من خلال المحافظة على شرط العملية لجدول الحل الأمثل) هناك حالتيين وهما:

- حالة استغلال الكميات المتاحة (الطاقات الإنتاجية) للقيود في الحل الأمثل **جزئيا** (b_1)؛
- حالة استغلال الكميات المتاحة (الطاقات الإنتاجية) للقيود في الحل الأمثل **كليا** (b_2,b_3).

أ. تحديد مجال التغير للطرف الأيمن للقيود والتي استغلت جزئيا في الحل الأمثل (b_1):

يلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل السابق أن S_1 موجود في تشكيلة الأساس لجدول الحل الأمثل، وهذا يعني أن الكمية المتاحة للقيد الأول لم يتم استغلالها بشكل كلي في الحل الأمثل حيث بقيت منها: 115/4غير مستغلة (فائضة). وبالتالي لا ندرس التغير في فيه إلا بعد الإستغلال التام له. أي يمكن تخفيض الكمية المتاحة (الطاقة الإنتاجية) للقيد الأول لـــ 115/4 أي يصبح: 40−115/4=45/4 وحدة.

ب. تحديد مجال التغير للطرف الأيمن للقيود والتي استغلت كليا في الحل الأمثل (b_2,b_3):

لمعرفة مقدار التغير (Δ) المسموح به في الطرف الأيمن للقيدين الثـاني والثالـث (b_2,b_3) لأنـه تـم استغلالها بشكل كلي في الحل الأمثل، لأن S_2,S_3 غير موجودتان في تشكيلة الأساس (قيمهمـا معدومـة)، نتبع ما يلي:

- نسجل عناصر عمود الموارد من جدول الحل الأمثل أعموديا؛
- نسجل عناصر العمود S_j (للقيد المطلوب) من جدول الحل الأمثل عموديا؛
- نستنتج المتراجحات؛
- نحدد مقدار التغير (Δ_j)؛
- نحدد مجال التغير المسموح به للطرف الأيمن (الكميـة المتاحـة) للقيـد المطلـوب والـذي يسـمح ببقاء الحل الحالي حل عملي.

بالنسبة لمجال التغير المسموح به للطرف الأيمن (الثاني) للقيد الثاني (b_2) والذي يسمح ببقاء الحل الحالي حل عملي يمكن تحديده كالتالي:

(Δ_2) S_2	عمود الموارد
-1/8	115/4
1/2	15
1/8	45/4

للمحافظة على شرط العملية في حالة *Max* أو *Min* يجب أن تكون جميع عناصر عمود المـوارد أكبـر أو يساوي 0، وعليه إشارة المتراجحات تكون من الشكل أكبر أو يساوي 0.

ومنه المتراجحات هي كالتالي:

$115/4-1/8\ (\Delta_2)\geq 0 \longrightarrow \Delta_2\leq 230$

$15+1/2\ (\Delta_2)\geq 0 \longrightarrow \Delta_2\geq -30$

$45/4+1/8\ (\Delta_2)\geq 0 \longrightarrow \Delta_2\geq -90$

ومنه: $-30\leq\Delta_2\leq 230$ أي: $\Delta_2 \in [-30,230]$

وعليه مجال التغير المسموح به للطرف الأيمن للقيد الثاني (b_2) والذي يسمح ببقاء الحل الحـالي حـل عملي هو [30+30,230+30−]، أي أن تغير الطرف الأيمن للقيد الثاني من 0 إلى 260 يسمح أو ببقاء الحـل الأمثل الحالي ثابتا.

بالنسبة لمجال التغير المسموح به للطرف الأيمن للقيد الثالث (b_3) والذي يسمح ببقاء الحل الحـالي حـل عملي يمكن تحديده كالتالي:

(Δ_3) S_3	عمود الموارد
-1/2	115/4
0	15
1/2	*45/4*

المتراجحات هي كالتالي:

$115/4-1/2\Delta_3\geq \longrightarrow \Delta_3\leq 115/2$

$45/4+1/2\Delta_3\geq \longrightarrow \Delta_3\geq -45/2$

ومنه: $-45/2\leq\Delta_3\leq 115/2$ أي: $\Delta_3 \in [-45/2,115/2]$

وعليه مجال التغير المسموح به للطرف الأيمن **للقيد الثالث** (b_3) والذي يسمح ببقاء الحل الحالي حل عملي هو [45/2+15-,115/2+15]، أي أن تغير الطرف الأيمن للقيد الثالث من 15/2− إلى 145/2 يسمح أو ببقاء الحل الأمثل الحالي ثابتا.

3. تحديد تأثير إخراج القيد الأول من البرنامج على الحل الأمثل الحالي:

يلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل السابق أن S_1 موجود في تشكيلة الأساس، وهذا يعني أن الحل الأمثل لا يتطلب استغلال كل الكمية المتاحة من القيد الأول، وبالتالي إذا إفترضنا أنه تم إخراج القيد الأول من البرنامج الخطي، فإن الحل الأمثل لا يتغير، لأنه لو اعدنا حل نفس البرنامج الخطي مع عدم وجود أي أثر للسطر الخاص بـــ S_1 فإننا سنتحصل على نفس الحل الأمثل، وبالتالي في هذه الحالة نقوم فقط بشطب السطر الخاص بالقيد الأول (S_1) في جدول الحل الأمثل.

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
~~S_1~~	~~3/2~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~-1/8~~	~~-1/2~~	~~115/4~~
X_3	1	0	1	0	1/2	0	15
X_2	1/4	1	0	0	1/8	1/2	45/4
Z	25	0	0	0	15	10	600

4. تحديد تأثيرإسقاط (إخراج) القيد الثالث من البرنامج الخطي على الحل الأمثل الحالي:

يلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل السابق أن S_3موجود خارج تشكيلة الأساس، وهذا معناه أن الحل الأمثل يتطلب استغلال كل الكمية المتاحة من القيد الثالث، وبالتالي إذا إفترضنا أن هذه الكمية المتاحة من الممكن أن تكون موجودة بكميات كبيرة، فهذا قد يكون له تاثيرا مباشرا على الحل الأمثل المتحصل عليه من قبل، ولمعرفة ما هو هذا التأثير نقوم بإدخال S_3 إلى تشكيلة الأساس.

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	3/2	0	0	1	-1/8	-1/2	115/4
X_3	1	0	1	0	1/2	0	15
X_2	1/4	1	0	0	1/8	1/2	45/4
Z	25	0	0	0	15	10	600

الجدول الموالي هوكالتالي:

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	7/4	1	0	1	0	0	40
X_3	1	0	1	0	1/2	0	15
~~S_3~~	~~1/2~~	~~2~~	~~0~~	~~0~~	~~1/4~~	~~1~~	~~45/2~~
Z	20	-20	0	0	25/2	0	375

بعد إدخال S_3 إلى تشكيلة الأساس نقوم بشطب السطر الخاص به، وبما أن شرط الأمثلية في الجدول الجديد غير محقق؛ فإنه نواصل البحث عن الحل الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس المبسطة، حتى الحصول على الجدول الجديد.

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
X_2	7/4	1	0	1	0	0	40
X_3	1	0	1	0	1/2	0	15
Z	55	0	0	20	25/2	0	1175

حسب الجدول أعلاه نلاحظ أن الحل الأمثل أصبح كالتالي:

$X_1=0, \quad X_2=40, \quad X_3=15, \quad Z=1175.$

5. تحديد تأثير إخراج المتغير X_1 من البرنامج الخطي على الحل الأمثل:

يلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل السابق أن X_1 موجود خارج تشكيلة الأساس، وهذا يعني أن الحل الأمثل لا يتطلب إنتاج هذا النوع من المنتجات مثلا، وبالتالي إذا إفترضنا أنه تم إخراج هذا المتغير من البرنامج الخطي (بسبب أنه لم يعد مطلوبا في السوق وتقرر عدم إنتاجه)، فإن الحل الأمثل لا يتغير في هذه الحالة، لأنه لو اعدنا حل نفس البرنامج الخطي مع عدم وجود أي أثر للمتغير X_1 فإننا سنتحصل على نفس الحل الأمثل، وبالتالي في هذه الحالة نقوم فقط بشطب العمود الخاص بالمتغير (X_1) في جدول الحل الأمثل.

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	3/2	0	0	1	-1/8	-1/2	115/4
X_3	1	0	1	0	1/2	0	15
X_2	1/4	1	0	0	1/8	1/2	45/4
Z	25	0	0	0	15	10	600

6. تحديد تأثير إخراج المتغير X_2 من البرنامج الخطي على الحل الأمثل:

يلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل السابق أن المتغير X_2 موجود في تشكيلة الأساس، وبما أن كل متغير في النموذج الأصلي يقابله قيد في النموذج الثنائي، فإن هذا معناه:

إخراج متغير في النموذج الأصلي $\longleftrightarrow$ **إخراج قيد في النموذج الثنائي.**

في هذه الحالة يتم الرجوع إلى جدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي، فإذا كان المتغير R_2 المكمل للمتغير الذي نريد إخراجه X_2 موجود خارج تشكيلة الأساس لجدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي، فإننا نقوم بإدخاله إلى تشكيلة الأساس ثم نقوم بشطب السطر الخاص به ونواصل الحل حتى نتحصل على الحل الأمثل الجديد للنموذج الثنائي ومنه نستخلص جدول الحل الأمثل الجديد للنموذج الأصلي.

7. تحديد تأثير التغير في معاملات المتغير X_1 في الطرف الأيسر للقيود في البرنامج على الحل الأمثل:

$MAX(Z) = 5X_1+20X_2+25X_3$
St:
$4X_1+X_2\leq 40$
$3X_1+2X_3\leq 30$
$X_2-1/2X_3\leq 15$
$X_1,X_2\geq 0$

بما أن المتغير X_1 لا يوجد ضمن عمود الأساس لجدول الحل الأمثل، فإنه معرفة أثر هذه التغيرات في معاملات X_1 (التغيرات في الطرف الأيسر للقيود) مباشرة على الحل الأمثل وذلك كالتالي:

في البداية يتم إيجاد قيد الثنائية المشارك مع X_1، حيث حسب التغيرات الجديدة في البرنامج فإن قيد الثنائية يصبح:

$\mathbf{X_1}$: $4Y_1+3Y_2+0Y_3 \geq 5$

ثم إيجاد قيمة X_1 في السطر **Z** في جدول الحل الأمثل، ويتطلب ذلك إيجاد قيم متغيرات الثنائية أولا:

$Y_1-0=0 \Longrightarrow Y_1=0$

$Y_2-0=15 \Longrightarrow Y_2=15$

$Y_3-0=10 \Longrightarrow Y_3=10$

بالتعويض في قيد الثنائية المشارك مع X_1 نجد:

$4(0)+3(15)+0\,(10)\,-5=40$

ثم حساب قيم العمود X_1 في جدول الحل الأمثل وذلك كما يلي:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ X_3 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7/4 & 19/4 \\ 0 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(1)+3(-7/4)+0(19/4) \\ 4(0)+3(1/4)+0(-5/4) \\ 4(0)+3(0)+0(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-5/4} \\ \mathbf{3/4} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

عمود الأساس	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	عمود الموارد
S_1	-5/4	0	0	1	-1/8	-1/2	115/4
X_3	3/4	0	1	0	1/2	0	15
X_2	0	1	0	0	1/8	1/2	45/4
Z	40	0	0	0	15	10	600

نلاحظ من خلال قيم السطر Z أنها موجبة مما يعني أن شرط الأمثلية محقق وبالتالي التغييرات في معاملات المتغير X_1 قد أدت ببقاء الحل الحالي حل أمثل حيث:

$X_1=0,\ X_2=45/4,\ X_3=15, Z=600.$

ملاحظة: في حالة ما أدت التغيرات في معاملات X_1 في القيود إلى عدم تحقق شرط الأمثلية، وظهور قيم العمود X_1 بإشارة سالبة، ففي هذه الحالة لا يمكن استخدام طريقة السمبلكس المبسطة للوصول إلى الحل الأمثل، لأنه لا يوجد متغير خارج وذلك لأن معاملات العمود X_1 سالبة، وبالتالي نقول أن التغيرات في معاملات المتغير X_1 في القيود قد أدت إلى برنامج خطي ليس له حل.

8. تحديد تأثير التغير في معاملات المتغير X_2 في الطرف الأيسر للقيود في البرنامج على الحل الأمثل:

$MAX(Z) = 5X_1+20X_2+25X_3$

St:

$2X_1+2X_2 \leq 40$

$2X_1+2X_3 \leq 30$

$X_2-1/2X_3 \leq 15$

$X_1,X_2 \geq 0$

بما أن المتغير X_2 يوجد ضمن عمود الأساس لجدول الحل الأمثل، فإنه من الصعب معرفة أثر هذه التغيرات في معاملات X_2 (التغيرات في الطرف الأيسر للقيود) مباشرة على الحل الأمثل، وفي هذه الحالة يفضل إعادة حل البرنامج الخطي مجددا بعد إدخال التغيرات (لا يمكن دراسة أثر تحليل الحساسية)

الفـــصـــــــل الرابع:
نماذج النقل

الفصل الرابع: نماذج النقل *Transportation Mrodels*

تمهيد:

تُعد مشاكل (نماذج) النقل حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية، بمعنى أن هذا النوع من المشاكل يمكن حله باستخدام البرمجة الخطية، إلا أن الوصول إلى الحل الأمثل يكون صعب جدا لأن عدد المتغيرات وعدد القيود يكون كبيرا نوعا ما، لذلك يتم اللجوء إلى استخدام نماذج النقل، لأن الأسلوب الذي توفره هذه الأخيرة هو الأكثر فاعلية وسرعة في الحل.

I. تعريف نموذج النقل:

إن مشكلة النقل تعتبر من الأساليب الرياضية الكمية المشتقة من البرمجة الخطية والتي تدرس عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع أو نقل كمية معينة من المنتجات من مصادر الإنتاج المتعددة إلى مراكز التوزيع أو الإستلام المتعددة، بحيث يكون مجموع تكاليف هذا النقل أقل ما يمكن.

II. شروط نموذج النقل:

لوجود نموذج النقل يفترض توفر مجموعة من الشروط هي كالتالي:

- وجود هدف لمشكلة النقل، سواء تعلقت بالوصول إلى أقل تكلفة ممكنة *Min* أو تحقيق أقصى عائد ممكن *Max*؛
- وجود عدد من المصادر الإنتاجية (مصانع، وحدات إنتاج، مخازن...)؛
- وجود عدد من المراكز التسويقية (أسواق، مخازن، مصانع....)؛
- يجب أن يتساوى مجموع الكميات المعروضة من المصادر مع مجموع الكميات المطلوبة من المراكز؛
- أن تكون هناك أوجه متعددة لاستغلال الكميات المعروضة من المصادر، وإلا لما كانت هناك مشكلة في توزيعها؛
- تجانس الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة، أي لهما نفس وحدة القياس (طن، لتر،.....).

III. صياغة نموذج النقل:

بإفتراض أن:

n: عدد المصادر الإنتاجية؛

m: عدد المراكز التسويقية؛

x_{ij}: تمثل الكميات المنقولة من المصدر i إلى المركز j؛

c_{ij}: التكلفة أو الإيراد الوحدوي لنقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى المركز j؛

S_i: الكميات المعروضة (المنتجة) في المصدر i؛

d_j: الكميات المطلوبة من المركز j.

Z: مجموع تكاليف أو أرباح النقل.

رياضيا نموذج النقل هو كالتالي:

أ. **دالة الهدف:** والتي تكتب وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$Max/Min(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\ x_{ij}$$

ب. **القيود:** تتمثل في:

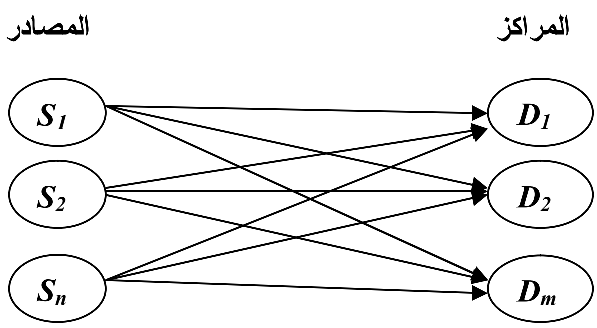
- تساوي الكميات المعروضة من المصادر مع الكميات المطلوبة من المراكز، أي: $\sum_{i=1}^{n} Si = \sum_{j=1}^{m} dj$
- يجب أن تكون الكميات المنقولة من المصادر إلى أي مركز تساوي طلب ذلك المركز: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = dj$
- يجب أن تكون الكميات المطلوبة من المراكز تساوي عرض أي مصدر: $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = Si$

ت. **شرط عدم السلبية:** $X_{ij} \geq 0$، أي يجب أن تكون المنقولة من المصدر i إلى المركز j أكبر أو يساوي0.

أما جدوليا فنموذج النقل يأخذ الشكل التالي:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	......	D_m	**مجموع الكميات المعروضة**
S_1	X_{11} C11	X_{12} C12	X_{13} C13	X_{14} C14	....	X_{1m} C1m	$\sum_{j=1}^{m} x_{1j}$
S_2	X_{21} C21	X_{22} C22	X_{23} C23	X_{24} C24	......	X_{2m} C2m	$\sum_{j=1}^{m} x_{2j}$
S_3	X_{31} C31	X_{32} C32	X_{33} C33	X_{34} C34	......	X_{3m} C3m	$\sum_{j=1}^{m} x_{3j}$
......	....	....	....	....	......	....	....
S_n	X_{n1} Cn1	X_{n2} Cn2	X_{n3} Cn3	X_{n4} Cn4	....	X_{nm} Cnm	$\sum_{j=1}^{m} x_{nj}$
مجموع الكميات المطلوبة	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i3}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i4}$	.....	$\sum_{i=1}^{n} x_{im}$	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$

بينما شبكيا يأخذ نموذج النقل الصورة التالية:



ملاحظة: قبل التوزيع يجب التأكد من أن مجموع الكميات المعروضة من طرف المصادر تساوي مجموع الكميات المطلوبة من المراكز، كما يفترض في كل الحالات أن يكون جدول النقل متوازن، أما في حالة عدم توازنه (العرض ≠ الطلب)، فإنه في هذه الحالة يدخل ضمن الحالات الخاصة لمسائل النقل.

IV. طرق حل نماذج النقل:

توجد مجموعة من الحلول لنماذج النقل هي كالتالي:

1. طرق الحل الإبتدائي (الحل الممكن): وتتمثل في:

أ. طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛

ب. طريقة الأقل تكلفة في الجدول؛

ت. طريقة الجزاء أو طريقة فوجل التقريبية *(VAM)*؛

ث. طريقة المفاضلة المزدوجة أو طريقة (*RAM*) التقريبية؛

ج. طريقة الأقل تكلفة في السطر (المصدر)؛

ح. طريقة الأقل تكلفة في العمود (المركز).

2. طرق الحل الأمثل: وهي طرق لتحسين الحل الابتدائي وإيجاد الحل الأمثل وتتمثل في:

أ. طريقة القفز على الصخور (الأحجار المتنقلة)؛

ب. طريقة التوزيع المعدلة (*MODI*).

مثال: (حالة *Min*)

مؤسسة صناعية لها ثلاثة وحدات (مصادر) إنتاجية متمثلة في الآتي:

المصدر	1	2	3
الكمية المنتجة	5000	6000	2500

تريد توزيعها على أربعة مراكز متمثلة في الآتي:

المركز	1	2	3	4
الكمية المطلوبة	6000	4000	2000	1500

نقل كل وحدة يتطلب تكاليف (دج)، مبينة في الجدول الآتي:

6	7	2	3
3	2	5	7
5	4	5	2

المطلوب:

- ✓ صياغة نموذج النقل في صورة برنامج خطي؟
- ✓ وضع المعطيات في جدول نقل؟
- ✓ أوجد الحل الإبتدائي بمختلف الطرق؟
- ✓ أوجد تكلفة النقل المثلى بمختلف الطرق؟

الحل:

✓ **صياغة نموذج النقل في صورة برنامج خطي:**

ليكن:

n: عدد المصادر الإنتاجية، ومنه: $n=3$

m: عدد المراكز التسويقية/ ومنه: $m=4$

x_{ij}: تمثل الكميات المنقولة من المصدر i إلى المركز j؛

c_{ij}: التكلفة أو الإيراد الوحدوي لنقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى المركز j؛

S_i: الكميات المعروضة (المنتجة) في المصدر i؛ حيث: $i=1,2,3$

d_j: الكميات المطلوبة من المركز j. ، حيث: $j=1,2,3,4$

Z: مجموع تكاليف أو إيرادات النقل.

ومنه البرنامج الخطي هو كالتالي:

أ. دالة الهدف:

$$\textbf{Min(z)}= 3X_{11}+2X_{12}+7X_{13}+6X_{14}+7X_{21}+5X_{22}+2X_{23}+3X_{24}+2X_{31}+5X_{32}+4X_{33}+5X_{34}$$

ب. القيود: *تتمثل في:*

قيود العرض:

قيد العرض للوحدة الإنتاجية الأولى: $X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}\leq5000$

قيد العرض للوحدة الإنتاجية الثانية: $X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}\leq6000$

قيد العرض للوحدة الإنتاجية الثالثة: $X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}\leq2500$

قيود الطلب:

قيد الطلب للمركز الأول: $X_{11}+X_{21}+X_{31}\geq6000$

قيد الطلب للمركز الثاني: $X_{12}+X_{22}+X_{32}\geq4000$

قيد الطلب للمركز الثالث: $X_{13}+X_{23}+X_{33}\geq2000$

قيد الطلب للمركز الرابع: $X_{14}+X_{24}+X_{34}\geq1500$

ت. شرط عدم السلبية:

$$X_{11},X_{12},X_{13},X_{14},X_{21},X_{22},X_23,X_{24},X_{13},X_{23},X_{33},X_{34}\geq0$$

ملاحظة:

- قيود العرض تكون على الشكل أقل أو يساوي، وهذا يعني أن مجموع الكميات المنقولة من أي مصدر لا يمكن أن تتجاوز عرض هذا المصدر.
- قيود الطلب تكون من الشكل أكبر أو يساوي، وهذا يعني مجموع الكميات المنقولة إلى أي مركز لا يمكن أن تقل عن طلب هذا المركز.

وبما أن مجموع **الكميات المعروضة من المصادر يساوي مجموع الكميات المطلوبة** من المراكز (13500=13500)، فإن النقل هو نموذج متوازن، وبالتالي البرنامج الخطي لنموذج النقل يمكن التعبير عنه كما يلي:

$$Min(z)= 3X_{11}+2X_{12}+7X_{13}+6X_{14}+7X_{21}+5X_{22}+2X_{23}+3X_{24}+2X_{31}+5X_{32}+4X_{33}+5X_{34}$$

$$\begin{aligned}
&ST:\\
&X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}=5000\\
&X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}=6000\\
&X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}=2500\\
&X_{11}+X_{21}+X_{31}=6000\\
&X_{12}+X_{22}+X_{32}=4000\\
&X_{13}+X_{23}+X_{33}=2000\\
&X_{14}+X_{24}+X_{34}=1500\\
&X_{11},X_{12},X_{13},X_{14},X_{21},X_{22},X_23,X_{24},X_{13},X_{23},X_{33},X_{34}\geq 0
\end{aligned}$$

✓ **وضع المعطيات في جدول نقل:**

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	X_{11} 3	X_{12} 2	X_{13} 7	X_{14} 6	5000
S_2	X_{21} 7	X_{22} 5	X_{23} 2	X_{24} 3	6000
S_3	X_{31} 2	X_{32} 5	X_{33} 4	X_{34} 5	2500
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	**13500**

ملاحظة: يشترط في جدول النقل أن يكون متوزانا (مجموع الكميات المعروضة = مجموع الكميات المطلوبة) قبل تطبيق الطرق المختلفة لحل نموذج النقل.

✓ **إيجاد الحل الإبتدائي (الممكن) لنموذج النقل بمختلف الطرق:**

أ. طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تتمثل هذه الطريقة في تشغيل الخلية الأولى شمالا غربا (تقاطع المصدر الأول مع المركز الأول) أولا بأكبر كمية ممكنة مع مراعاة في ذلك الكمية الموجودة (المتاحة) في المصدر والكمية المطلوبة في المركز، فإذا تم توزيع كل الكمية المتاحة في المصدر الأول يتم الإنتقال إلى المصدر الموالي (الثاني) **عموديا**، ونقول أن المصدر الأول مشبع؛ أما إذا تم توزيع كل الكمية المطلوبة في المركز الأول مع عدم استنفاذ كل الكمية المتاحة في المصدر الاول، فيتم الانتقال إلى المركز الموالي **أفقيا**، ونقول أن المركز الأول مشبع.

أما إذا تم توزيع كل الكمية المطلوبة في المركز الأول مع استنفاذ كل الكمية المتاحة في المصدر الاول، فيتم الانتقال إلى المصدر الموالي والمركز الموالي **محوريا أو قطريا**، وتشغيل الخلية (تقاطع المصدر الثاني مع المركز الثاني) ونقول أن المصدر الأول والمركز الأول مشبعين، وهكذا حتى تصبح كل المصادر وكل المراكز مشبعة.

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	5000 [3]	[2]	[7]	[6]	5000
S_2	1000 [7]	4000 [5]	1000 [2]	[3]	6000
S_3	[2]	[5]	1000 [4]	1500 [5]	2500
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	**13500**

تكلفة النقل الإجمالية:

Z =3(5000)+7(1000)+5(4000)+2(1000)+4(1000)+5(1500)=**55500 دج**

ملاحظة: لكي يكون هذا الحل حل إبتدائي (ممكن) لا بد أن تتوافر فيه الشروط التالية:

- **الشرط الأول:** يجب أن يتساوى مجموع الكميات المعروضة من المصادر مع مجموع الكميات المطلوبة من المراكز. **(13500=13500)**.
- **الشرط الثـــاني:** يجب أن يكون عدد الخلايا المشغلة (المستخدمة) يساوي عدد المصادر مضافا إليها عدد المراكز، ومطروحا منها واحد $(m+n-1)$، من الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المستخدمة= 6=1-3+4
- **الشرط الثالث:** يجب أن يكون الفائض في الكميات المتاحة (المعروضة) أو العجز في الكميات المطلوبة يساوي0.

نلاحظ أن الشروط السابقة محققة ومنه:**هذا الحل هو حل ابتدائي.**

ب. <u>طريقة الأقل تكلفة في الجدول:</u>

تتمثل هذه الطريقة في تشغيل الخلية التي بها أقل تكلفة في الجدول ككل، حيث يتم تشغيلها بأكبر عدد ممكـن من الكميات مع مراعاة في ذلك الكميات المتاحة في المصدر والكميات المطلوبة في المركــز، ثـم تكـرار الخطوة السابقة وهكذا إلى أن تصبح كل المصادر وكل المراكز مشبعة.

ملاحظة: في حالة تساوي التكلفة الأقل لعدد من الخلايا فإنه يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر عدد من الكميـات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة.

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	1000 [3]	4000 [2]	[7]	[6]	**5000**
S_2	2500 [7]	[5]	2000 [2]	1500 [3]	**6000**
S_3	2500 [2]	[5]	[4]	[5]	**2500**
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	**13500**

نلاحظ أن:

- **الشرط الثاني محقق** (عدد الخلايا المشغلة = 6=1−3+4)؛
- **الشرط الثالث محقق** (الفائض في الكميات المتاحة (المعروضة) أو العجز في الكميات المطلوبة يساوي0).

ومنه هذا الحل هو حل إبتدائي (ممكن)، وتكلفته الإجمالية للنقل هي:

$$Z=3(1000)+2(4000)+7(2500)+2(2000)+3(1500)+2(2500)=\mathbf{42000}$$ **دج**

ت. <u>طريقة الجزاء والعقاب</u> (*Vogel*) *VAM*:

تعتبر هذه الطريقة الأفضل في التطبيق لأنها تقوم على التوزيع حسب التكاليف، ويتم تطبيقها بإتباع الخطوات التالية:

- حساب الفرق بين أقل تكلفة والتي تليها (أقل التكلفتين) لكل سطر ولكل عمود؛
- نختار السطر أو العمود المعني بالتشغيل (التوزيع) على أساس أكبر فارق تكلفة؛
- بعد تحديد السطر أو العمود المعني بالتشغيل يتم اختيار الخلية التي بها أقل تكلفة فيه، ونوزع فيها.
- بعد عملية التشغيل يتم التخلص من السطر أو العمود إذا كان مشبع.
- بعد عملية الشطب يتم الإنتقال إلى جدول آخر وتكرار نفس الخطوات السابقة إلى أن تصبح كل الأسطر والأعمدة مشبعة.

ملاحظة:

- الفرق يأخذ بالقيمة المطلقة.
- عند تساوي الفوارق نوزع في الخانة (الخلية) ذات التكلفة الأقل.
- في حالة تساوي التكلفة الأقل بين خليتين أو أكثر يتم اختيار الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة.

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة	الفرق بين أقل التكلفتين في السطر
S_1	^{3}	4000 ^{2}	^{7}	^{6}	5000	1
S_2	^{7}	^{5}	^{2}	^{3}	6000	1
S_3	^{2}	^{5}	^{4}	^{5}	2500	2
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	13500	/
الفرق بين أقل التكلفتين في العمود	1	3	2	2	/	/

S_i/D_j	D_1	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة	الفرق بين أقل التكلفتين في السطر
S_1	~~1000~~ 3	~~7~~	~~6~~	~~1000~~	~~3~~
S_2	7	2	3	6000	1
S_3	2	4	5	2500	2
مجموع الكميات المطلوبة	6000	2000	1500	9500	/
الفرق بين أقل التكلفتين في العمود	1	2	2	/	/

S_i/D_j	D_1	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة	الفرق بين أقل التكلفتين في السطر
S_2	X_{21} 7	2	3	6000	1
S_3	~~2500 2~~	~~4~~	~~5~~	~~2500~~	~~2~~
مجموع الكميات المطلوبة	5000	2000	1500	*8500*	/
الفرق بين أقل التكلفتين في العمود	5	2	2	/	/

S_i/D_j	D_1	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة	الفرق بين أقل التكلفتين في السطر
S_2	2500 7	2000 2	1500 3	6000	1
مجموع الكميات المطلوبة	2500	2000	1500	*6000*	/
الفرق بين أقل التكلفتين في العمود	7	2	3	/	/

ومنه جدول النقل بعد التوزيع هو:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	1000 ³	4000 ²	⁷	⁶	5000
S_2	2500 ⁷	⁵	2000 ²	1500 ³	6000
S_3	2500 ²	⁵	⁴	⁵	2500
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	*13500*

نلاحظ أن:

- **الشرط الثاني محقق** (عدد الخلايا المشغلة = 6=1−3+4)؛
- **الشرط الثالث محقق** (الفائض في الكميات المتاحة (المعروضة) أو العجز في الكميات المطلوبة يساوي0).

ومنه هذا الحل هو حل إبتدائي (ممكن)، وتكلفته الإجمالية للنقل هي:

Z=3(1000)+2(4000)+7(2500)+2(2000)+3(1500)+2(2500)=42000 دج

ث. <u>طريقة المفاضلة المزدوجة (*Ram*)</u>

هذه الطريقة تقوم على التوزيع حسب التكاليف، ويتم تطبيقها بإتباع الخطوات التالية:

- حساب الفرق بين تكلفة الخلية وأكبر تكلفة في سطرالخلية وأكبر تكلفة في عمود الخلية (الفرق= تكلفة الخلية− أكبر تكلفة في سطر الخلية− أكبر تكلفة في عمود الخلية)؛
- يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر فارق متبوع بإشارة سالبة (أقل فارق سالب)، وفي حالة تساوي الفارق بين خليتين أو أكثر، يتم اختيار الخلية التي بها أقل تكلفة ونقوم بتشغيلها (التوزيع فيها)؛ وإذا تكررت أقل تكلفة في بعض الخلايا يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة.
- بعد التوزيع إذا كان هناك سطر أو عمود مشبع يتم شطبه والإنتقال إلى جدول آخر وتكرار نفس الخطوات السابقة إلى أن تصبح كل الأسطر والأعمدة مشبعة.

ملاحظة: الفرق لا يؤخذ بالقيمة المطلقة.

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	-11 ³	-10 ²	-7 ⁷	-7 ⁶	5000
S_2	-7 ⁷	-7 ⁵	-12 ² (2000)	-10 ³	6000
S_3	-10 ²	-5 ⁵	-8 ⁴	-6 ⁵	2500
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	*13500*

S_i/D_j	D_1	D_2	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	-10 [3]	-9 [2]	-6 [6]	5000
S_2	-7 [7]	-7 [5]	-10 [3]	4000
~~S_3~~	-10 [2] 2500	-5 [5]	-6 [5]	~~2500~~
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	1500	11500

نلاحظ ان أكبر قيمة متبوعة بإشارة سالبة هـــي (−10) موجـــودة فـــي ثلاثـــة خلايـــا، ومنـــه نقـــوم بتشغيل الخلية التي بها أقل تكلفة بأكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة.

S_i/D_j	D_1	D_2	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	-10 [3] 3500	-9 [2]	-6 [6]	5000
S_2	-7 [7]	-7 [5]	-10 [3]	4000
مجموع الكميات المطلوبة	3500	4000	1500	9000

نلاحظ ان أكبر قيمة متبوعـــة بإشـــارة ســـالبة هـــي (− 10) موجـــودة فـــي خليتـــين، ومنـــه نقـــوم بتشغيل الخلية التي بها أقل، وفي حالة تساوي التكلفة الأقل، نقـــوم باختيـــار الخليـــة التـــي يمكـــن تشـــغيلها (التوزيع فيها) بأكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة.

S_i/D_j	D_2	D_4	مجموع الكميات المعروضة
~~S_1~~	-9 [2] 1500	-6 [6]	~~1500~~
S_2	-5 [5]	-8 [3]	4000
مجموع الكميات المطلوبة	4000	1500	5500

S_i/D_j	D_2	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_2	0 [5] 2500	-2 [3] 1500	4000
مجموع الكميات المطلوبة	2500	1500	4000

ومنه جدول النقل بعد التوزيع هو:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	**3500** [3]	**1500** [2]	[7]	[6]	**5000**
S_2	[7]	**2500** [5]	**2000** [2]	**1500** [3]	**6000**
S_3	**2500** [2]	[5]	[4]	[5]	**2500**
مجموع الكميات المطلوبة	**6000**	**4000**	**2000**	**1500**	**13500**

نلاحظ أن الشروط الثلاثة محققة، ومنه هذا الجدول هو **جدول حل إبتدائي**، وتكلفته الإجمالية للنقل هي:

$$Z=3(3500)+2(1500)+5(2500)+2(2000)+3(1500)+2(2500)=\mathbf{39500}$$ **دج**

ج. <u>طريقة الأقل تكلفة في السطر (المصدر):</u>

تتمثل هذه الطريقة في تشغيل خلايا السطر الأول (التوزيع لها) حيث تعطي الأولوية للخلية التي بها أقل تكلفة في السطر، حيث يتم تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة في ذلك الكميات المتاحة في المصدر الأول، وعند توزيع كل كميات السطر الأول يتم الإنتقال إلى السطر الثاني ثم السطر الموالي، وهكذا دائما بتطبيق نفس قاعدة التوزيع السابقة إلى أن تصبح كل الأسطر مشبعة.

ملاحظة: في حالة تساوي التكلفة الأقل لعدد من الخلايا في نفس السطر (المصدر) فإنه يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة، أما عند تساوي الكميات المطلوبة فإنه يتم تشغيل إحدى الخلايا عشوائيا.

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	1000 [3]	4000 [2]	[7]	[6]	5000
S_2	2500 [7]	[5]	2000 [2]	1500 [3]	6000
S_3	2500 [2]	[5]	[4]	[5]	2500
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	*13500*

نلاحظ أن الشروط الثلاثة محققة، ومنه هذا الجدول هو **جدول حل إبتدائي**، وتكلفته الإجمالية للنقل هي:

$Z=3(1000)+2(4000)+7(2500)+2(2000)+3(1500)+2(2500)=\mathbf{42000}$ **دج**

ح. <u>طريقة الأقل تكلفة في العمود (المركز):</u>

تتمثل هذه الطريقة في تشغيل خلايا العمود الأول (التوزيع لها) حيث تعطي الأولوية للخلية التي بها أقل تكلفة في العمود، حيث يتم تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة في المصادر، وعندما يشبع العمود الأول يتم الإنتقال إلى العمود الثاني ثم العمود الموالي، وهكذا دائما بتطبيق نفس قاعدة التوزيع السابقة إلى أن تصبح كل الأعمدة مشبعة.

ملاحظة: في حالة تساوي التكلفة الأقل لعدد من الخلايا في نفس العمود، فإنه يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المتاحة، أما عند تساوي الكميات المتاحة فإنه يتم تشغيل إحدى الخلايا عشوائيا.

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	3500 [3]	1500 [2]	[7]	[6]	5000
S_2	[7]	2500 [5]	2000 [2]	1500 [3]	6000
S_3	2500 [2]	[5]	[4]	[5]	2500
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	*13500*

نلاحظ أن الشروط الثلاثة محققة، ومنه هذا الجدول هو **جدول حل إبتدائي**، وتكلفته الإجمالية للنقل هي:

$Z=3(3500)+2(1500)+5(2500)+2(2000)+3(1500)+2(2500)=\mathbf{39500}$ **دج**

<u>ملاحظة:</u>

- إذا كان عدد الخلايا المشغلة يساوي عدد المصادر مضافا إليها عدد المراكز مطروحا منها الواحد ($m+n-1$)، نقول بأن الحالة عادية؛
- إذا كان عدد الخلايا المشغلة أقل من عدد المصادر مضافا إليها عدد المراكز مطروحا منها الواحد ($m+n-1$)، نقول بأن هناك حالة على عدم الإنتظام.

<u>تقييم طرق الحل الإبتدائي:</u>

الطريقة	المزايا	العيوب
طريقة الزاوية الشمالية الغربية	سهلة التطبيق. السرعة في التوزيع.	تهمل التكاليف الأقل في الجدول ككل.
طريقة الأقل تكلفة في الجدول	تأخذ بعين الاعتبار التكلفة الأقل في الأسطر والأعمدة معا.	صعوبة التطبيق.
طريقة الجزاء والعقاب (*Vogel*)	تأخذ بعين الاعتبار التكاليف عند التوزيع.	صعبة ومعقدة تستغرق وقت طويل.

		تتطلب جداول كثيرة للوصول إلى الحل الأمثل.
طريقة المفاضلة المزدوجة (*Ram*)	تأخذ بعين الاعتبار التكاليف عند التوزيع.	صعبة ومعقدة تستغرق وقت طويل. تتطلب جداول كثيرة للوصول إلى الحل الأمثل.
طريقة الأقل تكلفة في السطر	سهلة التطبيق؛ تأخذ بعين الاعتبار التكاليف الأقل في الأسطر.	تهمل التكاليف الأقل في الجدول ككل.
طريقة الأقل تكلفة في العمود	سهلة التطبيق؛ تأخذ بعين الاعتبار التكاليف الأقل في الأعمدة.	تهمل التكاليف الأقل في الجدول ككل.

✓ **<u>إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل بمختلف الطرق:</u>**

أ. <u>طريقة القفز على الصخور (الأحجار المتنقلة):</u>

هذه الطريقة تتمثل خطواتها في الآتي:

- حل النموذج بإحدى طرق الحل الإبتدائي ويفضل استخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية أو طريقة الأقل تكلفة في الجدول، لأنهما يقللان من حالات عدم تحقق شرط (عدد الخلايا المشغلة = $m+n-1$)، وذلك مقارنة بالطرق الأخرى للحل الإبتدائي، وفي حالة عدم تحقق هذا الشرط فإنه يجب تشغيل خلية بكميات معدومة لتسهيل عملية التنقل.
- حساب صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغلة، وذلك بإتباع خط السير التالي:
  - يجب أن يكون التحرك أو ما يطلق عليه مسار الحلقة مغلقا أفقيا يمينا او يسارا ورأسيا إلى الأعلى أو إلى الأسفل، التحرك القطري مرفوض، وبالتالي أي إنعطاف أو رجوع ينتج عنه زاوية قائمة وهي خلية مشغلة؛
  - خط السير يجب أن يمر بخلايا مشغلة فقط ما عدا الخلية المراد تقييمها، وفي حالة الإنعطاف فإن الخلايا المشغلة في وسط الطريق لا تؤخذ بعين الإعتبار؛
  - حساب صافي التغير في التكلفة على أساس المسار ينتج عنه الإشارات:+،−،+،−،+،−،+،−،....
- بعد حساب صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغلة يمكن الحصول على الآتي:
  - إذا ظهرت قيم صافي التغير في التكلفة لجميع الخلايا غير المشغلة في الجدول ≤ 0 (أكبر أو يساوي الصفر)، يعني أن الجدول الذي وصلنا إليه هو جدول حل أمثل؛
  - إذا ظهر صافي التغير في التكلفة>0 (أقل من الصفر) لخلية أو أكثر في الجدول، هذا يعني أن الجدول الذي وصلنا إليه ليس جدول حل أمثل، وبالتالي ننتقل إلى الخطوة الموالية.

- نختار الخلية غير المشغلة التي بها أكبر صافي تغير متبوع بإشارة سالبة (−)، ويتم تشغيلها بأكبر عدد ممكن من الكميات مع مراعاة في ذلك الكمية المتاحة (المعروضة) والكمية المطلوبة.
- إذا كان أكبر صافي تغير متبوع بإشارة سالبة (−) موجود في أكثر من خلية، نختار الخلية التي بها أقل تكلفة، وإذا كان هناك تساوي في التكاليف نختار الخلية التي يمكن تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة.

- بعد عملية الترحيل (التشغيل) يتم الحصول على جدول نقل جديد مع إهمال الجدول القديم وتكرار الخطوات السابقة من جديد.

لدينا الحل الإبتدائي باستخدام طريقة زاوية الشمال الغربي هو كالتالي:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	5000 [3]	(+1) [2]	(+9) [7]	(+7) [6]	5000
S_2	1000 [7]	4000 [5]	1000 [2]	(+0) [3]	6000
S_3	(-7) [2]	(-2) [5]	1000 [4]	1500 [5]	2500
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	*13500*

حساب صافي التغير $\Delta_{i,j}$ للخلايا غير المشغلة:

$\Delta_{1,2}=2-5+7-3= +1$
$\Delta_{1,3}=7-2+7-3= +9$
$\Delta_{1,4}=6-5+4-2+7-3= +7$
$\Delta_{2,4}=3-2+4-5= 0$
$\Delta_{3,1}=2-4+2-7= -7$
$\Delta_{3,2}=5-4+2-5= -2$

نلاحظ أن هناك بعض الخلايا غير المشغلة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي هذا الجدول ليس جدول حل أمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة ($\Delta_{3.1}= -7$)، ونقوم بتشغيلها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكمية المتاحة (الكمية المعنية بالترحيل هي:1000). ومنه نحصل على الجدول الجديد للنقل، وهو كالتالي:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	5000 [3]	0 [2]	(+8) [7]	(+0) [6]	5000
S_2	(+1) [7]	4000 [5]	2000 [2]	(-6) [3]	6000
S_3	1000 [2]	(+4) [5]	(+6) [4]	1500 [5]	2500
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	13500

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغلة هو 5 لا يساوي 6: (6=1-4+3)، وبالتالي نضيف خلية وهمية بكمية معدومة على أساس أقل تكلفة ولتكن الخلية التي يتقاطع فيها المصدر الأول مع المركز الثاني. وبعده نقوم بحساب صافي التغير للخلايا غير المشغلة في الجدول الجديد:

$\Delta_{1.3}=7-2+5-2=+8$
$\Delta_{1.4}=6-5+2-3=0$
$\Delta_{2.1}=7-3+2-5=+1$
$\Delta_{2.4}=3-5+2-3+2-5=-6$
$\Delta_{3.2}=5-2+3-2=+4$
$\Delta_{3.3}=4-2+5-2+3-2=+6$

نلاحظ أن هناك خلية غير مشغلة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي هذا الجدول ليس جدول حل أمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة ($\Delta_{2.4}=-6$)، ونقوم بتشغيلها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكمية المتاحة (الكمية المعنية بالترحيل هي:1500). ومنه نحصل على الجدول الجديد للنقل، وهو كالتالي:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	3500 (3)	1500 (2)	(7)	(6)	5000
S_2	(7)	2500 (5)	2000 (2)	1500 (3)	6000
S_3	2500 (2)	(5)	(4)	(5)	2500
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	*13500*

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغلة هو 6 = 6: (6=1-4+3).

نقوم بحساب صافي التغير للخلايا غير المشغلة في الجدول الجديد:

$\Delta_{1.3}=7-2+5-2=+8$
$\Delta_{1.4}=6-3+5-2=+6$
$\Delta_{2.1}=7-3+2-5=+1$
$\Delta_{3.2}=5-2+3-2=+4$
$\Delta_{3.3}=4-2+5-2+3-2=+6$
$\Delta_{3.4}=5-3+5-2+3-2=+6$

بما أن جميع قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغلة أكبر أو يساوي 0 ($\Delta_{i.j}\geq 0$)، فإن هذا الجدول هو: **جدول حل أمثل**، وتكلفته الإجمالية للنقل (z)هي: **39500 دج**

<u>ملاحظة:</u>

في حالة إذا ما تم أخذ الإشارات: −، +، −، +، −، +، −، +،....في حساب صافي التغير في التكلفة على أساس المسار للخلايا غير المشغلة، فإن الخلية التي يتم تشغيلها هي التي يكون بها أكبر صافي تغير متبوع بإشارة موجبة، حيث في عملية الترحيل نتبع الاشارات: +، −، +، −، +، −،...، وجدول الحل الأمثل هو الجدول الذي تكون جميع قيم صافي التغير في التكلفة لخلاياه غير المشغلة سالبة أي: أقل من 0 ($\Delta_{i.j}<0$).

ب. طريقة التوزيع المعدلة *Modi*:

لتطبيق هذه الطريقة لا بد من إتباع الخطوات التالية:

- حل النموذج بإحدى طرق الحل الإبتدائي ويفضل استخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية أو طريقة الأقل تكلفة في الجدول؛

- إيجاد متغيرات الثنائية U_i و V_j عن طريق العلاقة: $C_{ij}=U_i+V_j$ حيث : U_i: تمثل المصادر، V_j: تمثل المراكز، C_{ij}: تكلفة النقل في الخلية. هذه العلاقة يجب أن تتم وفق الخلايا المشغلة فقط، ولإيجاد متغيرات الثنائية ننطلق من وضع أحد المتغيرات يساوي0، وهذا حفاظا على عدد المتغيرات يساوي عدد القيود (يفضل اختيار متغير الثنائية للسطر أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الخلايا المشغلة ووضعه يساوي0).

- إيجاد صافي التغير في التكلفة $\Delta_{i.j}$ للخلايا غير المشغلة عن طريق العلاقة: $\Delta_{i.j}= C_{ij} -(U_i+V_j)$

- بعد حساب صافي التغير في التكلفة يمكن الوصول إلى التالي:

- جميع قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغلة ≤0 أكبر أو يساوي الصفر، هذا يعني أن الجدول الذي وصلنا إليه هو جدول حل أمثل.
- إذا ظهر صافي التغير في التكلفة لبعض الخلايا غير المشغلة بإشارة سالبة، أي: >0 أقل من الصفر، هذا يعني أن الجدول لا يمثل جدول حل أمثل، وبالتالي ننتقل إلى الخطوة الموالية.

- نختار الخلية غير المشغلة التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة (−) ونقوم بتشغيلها بعد وضع الإشارات: +،−،+،−...، في حالة كان هناك تساوي في صافي التغير الأكبر المتبوع باشارة سالبة نختار الخلية غير المشغلة التي بها أقل تكلفة، في حالة التساوي في التكلفة نختار الخلية التي يمكن تشغيلها بأكبر كمية مطلوبة مع مراعاة الكمية المتاحة.

- بعد عملية التشغيل (الترحيل) للخلية يتم الرجوع إلى الخطوة الثانية مع جدول جديد، وهكذا حتى يتم الوصول إلى جدول الحل الأمثل.

بالنسبة للمثال السابق:

لدينا الحل الإبتدائي باستخدام طريقة زاوية الشمال الغربي:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة	U_i
S_1	5000 [3]	(+1) [2]	(+9) [7]	(+7) [6]	5000	$U_1=-4$
S_2	1000 [7]	4000 [5]	1000 [2]	(0) [3]	6000	$U_2=0$
S_3	(-7) [2]	(-2) [5]	1000 [4]	1500 [5]	2500	$U_3=2$
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	*13500*	/
V_j	$V_1=7$	$V_2=5$	$V_3=2$	$V_4=3$	/	/

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغلة هو 6 = 6: (6=1-4+3)، **لنفترض $U_2=0$**، لأن السطر الثاني به أكبر عدد من الخلايا المشغلة، ونقوم بايجاد متغيرات الثنائية على اساس الخلايا المشغلة (موضحة في الجدول).

نقوم بحساب صافي التغير $\Delta_{i.j}$ للخلايا غير المشغلة على أساس العلاقة: $\Delta_{i.j}= C_{ij} -(U_i+V_j)$.

$\Delta_{1.2}$=2-(-4)-5=+1

$\Delta_{1.3}$=7-(-4)-2=+9

$\Delta_{1.4}$=+7

$\Delta_{2.4}$=0

$\Delta_{3.1}$= -7

$\Delta_{3.2}$= -2

نلاحظ أن هناك خلايا غير مشغلة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي هذا الجدول ليس جدول حل أمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة ($\Delta_{3.1}$= -7)، ونقوم بتشغيلها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكمية المتاحة (الكمية المعنية بالترحيل هي:1000). ومنه نحصل على الجدول الجديد للنقل، وهو كالتالي:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة	U_i
S_1	5000 [3]	0 [2]	(+8) [7]	(0) [6]	5000	$U_1=0$
S_2	(+1) [7]	4000 [5]	2000 [2]	(-6) [3]	6000	$U_2=3$
S_3	1000 [2]	(+4) [5]	(+6) [4]	1500 [5]	2500	$U_3= -1$
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	*13500*	/
Vj	$V_1=3$	$V_2=2$	$V_3= -1$	$V_4=6$	/	/

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغلة هو 5 لا يساوي 6: (6=1-4+3)، وبالتالي نضيف خلية وهمية بكمية معدومة على أساس أقل تكلفة، بالإضافة على وضعية تسمح بحساب صافي التغير عند الانتقال بشكل زوايا قائمة، ولتكن الخلية التي يتقاطع فيها المصدر الأول مع المركز الثاني، ثم نعيد تكرار نفس الخطوات السابقة. وذلك بافتراض **$U_1=0$**، ثم نقوم بحساب متغيرات الثنائية للخلايا المشغلة وصافي التغير للخلايا غير المشغلة.

نلاحظ أن هناك خلايا غير مشغلة في الجدول بها صافي تغير سالب، وبالتالي هذا الجدول ليس جدول حل أمثل، ومنه نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة سالبة ($\Delta_{2.4}$= -6)، ونقوم بتشغيلها بأكبر عدد ممكن من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكمية المتاحة (الكمية المعنية بالترحيل هي:1500). ومنه نحصل على الجدول الجديد للنقل، وهو كالتالي:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة	U_i
S_1	3500 [3]	1500 [2]	(+8) [7]	(+6) [6]	5000	$U_1=-3$
S_2	(+1) [7]	2500 [5]	2000 [2]	1500 [3]	6000	$U_2=0$
S_3	2500 [2]	(4) [5]	(+6) [4]	(+6) [5]	2500	$U_3=-4$
مجموع الكميات المطلوبة	6000	4000	2000	1500	*13500*	/
Vj	$V_1=6$	$V_2=5$	$V_3=2$	$V_4=3$	/	/

نلاحظ أن عدد الخلايا المشغلة هو 6 = 6: (6=1-4+3)، **لنفترض $U_2=0$**، لأن السطر الثاني به أكبر عــدد من الخلايا المشغلة، ونقوم بايجاد متغيرات الثنائية على اساس الخلايا المشغلة، ثم نقوم بحساب صافي التغير $\Delta_{i.j}$ للخلايا غير المشغلة على أساس العلاقة:

$$\Delta_{i.j}= C_{ij} -(U_i+V_j).$$

بما أن جميع قيم صافي التغير في التكلفة للخلايا غير المشغلة أكبر أو يساوي 0 ($\Delta_{i.j}\geq 0$)، فــإن هــذا الجدول هو: **جدول حل أمثل**، وتكلفته الإجمالية للنقل (z)هي: 39500 دج.

ملاحظة:

في حالة إذا ما تم أخذ الإشارات: − ،+،−،+،−،+،−،+،....في حساب صافي التغير في التكلفــة علــى أساس المسار للخلايا غير المشغلة، فإن الخلية التي يتم تشغيلها هي التي يكون بها أكبر صافي تغير متبــوع بإشارة موجبة، حيث في عملية الترحيل نتبع الاشارات: +،−،+،−،+،−،...، وجدول الحل الأمثل هو الجــدول الذي تكون جميع قيم صافي التغير في التكلفة لخلاياه غير المشغلة سالبة أي: أقل من 0 ($\Delta_{i.j}< 0$).

V. تطبيق نموذج النقل في حالة التعظيم (*Max*)

إن أول إستخدام لنماذج النقل كان لدراسة مشكلة تخفيض تكاليف النقل، إلا أنه توســع مجــال تطبيقهــا لدراسة مسائل تعظيم الأرباح (العوائد) من خلال إتباع أحد الأسلوبين وهما:

أ. تحويل مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة تكاليف من خلال تحديد أكبر ربح في المصفوفة، وطــرح بــاقي الأرباح منه مع أخذ الفرق بالقيمة المطلقة، ثم حلها بالطرق المذكورة سابقا.

Max

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	X_{11} [10]	X_{12} [8]	X_{13} [7]	X_{14} [10]	6000
S_2	X_{21} [7]	X_{22} [11]	X_{23} [6]	X_{24} [12]	7000
S_3	X_{31} [9]	X_{32} [12]	X_{33} [8]	X_{34} [14]	2000
مجموع الكميات المطلوبة	5000	3000	4000	3000	15000

تحويل النموذج السابق من نموذج أرباح ***Max*** إلى نموذج تكاليف ***Min***، يصبح كالتالي:

S_i/D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	مجموع الكميات المعروضة
S_1	X_{11} 4	X_{12} 6	X_{13} 7	X_{14} 4	6000
S_2	X_{21} 7	X_{22} 3	X_{23} 8	X_{24} 2	7000
S_3	X_{31} 5	X_{32} 2	X_{33} 6	X_{34} 0	2000
مجموع الكميات المطلوبة	5000	3000	4000	3000	*15000*

ب. بقاء مصفوفة الأرباح كما هي، وحلها باستخدام طرق النقل المختلفة لكن الإختلاف في بعض القواعد كما يلي:

بالنسبة لطرق الحل الإبتدائي:

الطريقة	القاعدة
الزاوية الشمالية الغربية	نفس الطريقة المتبعة في حالة نموذج *Min*.
طريقة الأكبر ربح في الجدول	تشغيل الخلية التي بها أكبر ربح في الجدول ككل، حيث يتم تشغيلها بأكبر عدد ممكن من الكميات مع مراعاة في ذلك الكميات المتاحة في المصدر والكميات المطلوبة في المركز، ثم تكرار الخطوة السابقة وهكذا إلى أن تصبح كل المصادر وكل المراكز مشبعة.
طريقة الجزاء والعقاب *VAM* (*Vogel*)	هذه الطريقة يتم تطبيقها بإتباع الخطوات التالية: - حساب الفرق بين أعلى ربح والأصغر منه مباشرة لكل سطر ولكل عمود؛ - نختار السطر أو العمود المعني بالتشغيل (التوزيع) على أساس أكبر فارق ربح؛ - بعد تحديد السطر أو العمود المعني بالتشغيل يتم اختيار الخلية التي بها أكبر ربح فيه، ونوزع فيها. - بعد عملية التشغيل يتم التخلص من السطر أو العمود إذا كان مشبع. - بعد عملية الشطب يتم الإنتقال إلى جدول آخر وتكرار نفس الخطوات السابقة إلى أن تصبح كل الأسطر والأعمدة مشبعة. **<u>ملاحظة</u>:** – الفرق يأخذ بالقيمة المطلقة. - عند تساوي الفوارق نوزع في الخانة (الخلية) ذات الربح الأكبر. - في حالة تساوي الربح الأكبر بين خليتين أو أكثر يتم اختيار الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة.
طريقة المفاضلة المزدوجة (*Ram*)	هذه الطريقة يتم تطبيقها بإتباع الخطوات التالية: - حساب الفرق بين ربح الخلية وأقل ربح في سطر الخلية وأقل ربح في عمود الخلية (الفرق= ربح الخلية– أقل ربح في سطر الخلية– أقل ربح في عمود الخلية)؛ - يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر فارق متبوع بإشارة موجبة، وفي حالة تساوي الفارق بين خليتين أو أكثر، يتم اختيار الخلية التي بها أكبر ربح ونقوم بتشغيلها (التوزيع فيها)؛ وإذا تكرر أكبر ربح في بعض الخلايا يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة. - بعد التوزيع إذا كان هناك سطر أو عمود مشبع يتم شطبه والإنتقال إلى جدول آخر وتكرار نفس الخطوات السابقة إلى أن تصبح كل الأسطر والأعمدة مشبعة.

طريقة الأكبر ربح في السطر (المصدر)	تتمثل هذه الطريقة في تشغيل خلايا السطر الأول (التوزيع لها) حيث تعطي الأولوية للخلية التي بها أكبر ربح في السطر، حيث يتم تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة في ذلك الكميات المتاحة في المصدر الأول، وعند توزيع كل كميات السطر الأول يتم الإنتقال إلى السطر الثاني ثم السطر الموالي، وهكذا دائما بتطبيق نفس قاعدة التوزيع السابقة إلى أن تصبح كل الأسطر مشبعة. **<u>ملاحظة</u>:** في حالة تساوي الربح الأكبر لعدد من الخلايا في نفس السطر (المصدر) فإنه يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة، أما عند تساوي الكميات المطلوبة فإنه يتم تشغيل إحدى الخلايا عشوائيا.
طريقة الأكبر ربح في العمود(المركز)	تتمثل هذه الطريقة في تشغيل خلايا العمود الأول (التوزيع لها) حيث تعطي الأولوية للخلية التي بها أكبر ربح في العمود، حيث يتم تشغيلها بأكبر عدد من الكميات المطلوبة مع مراعاة الكميات المتاحة في المصادر، وعندما يشبع العمود الأول يتم الإنتقال إلى العمود الثاني ثم العمود الموالي، وهكذا دائما بتطبيق نفس قاعدة التوزيع السابقة إلى أن تصبح كل الأعمدة مشبعة. **<u>ملاحظة</u>:** في حالة تساوي الربح الأكبر لعدد من الخلايا في نفس العمود، فإنه يتم تشغيل الخلية التي بها أكبر عدد من الكميات المتاحة، أما عند تساوي الكميات المتاحة فإنه يتم تشغيل إحدى الخلايا عشوائيا.

بالنسبة لطرق الحل الأمثل:

الطريقة	القاعدة
طريقة الاحجار المتنقلة	نختار الخلية غير المشغلة التي بها أكبر صافي تغير متبوع بإشارة موجبة، ونقوم بتشغيلها بعد وضع الإشارات: +،−،+،−،...، في حالة كان هناك تساوي في صافي التغير الأكبر المتبوع باشارة موجبة نختار الخلية غير المشغلة التي بها أكبر ربح، في حالة التساوي في الربح نختار الخلية التي يمكن تشغيلها بأكبر كمية مطلوبة مع مراعاة الكمية المتاحة. **شرط الأمثلية:** جميع قيم صافي التغير للخلايا غير المشغلة ≥0 أقل أو يساوي الصفر، هذا يعني أن الجدول هو جدول حل أمثل.
طريقة التوزيع المعدلة	نختار الخلية غير المشغلة التي بها أكبر صافي تغير متبوع بإشارة موجبة، ونقوم بتشغيلها بعد وضع الإشارات: +،−،+،−،...، في حالة كان هناك تساوي في صافي التغير الأكبر المتبوع باشارة موجبة نختار الخلية غير المشغلة التي بها أكبر ربح، في حالة التساوي في الربح نختار الخلية التي يمكن تشغيلها بأكبر كمية مطلوبة مع مراعاة الكمية المتاحة. **شرط الأمثلية:** جميع قيم صافي التغير للخلايا غير المشغلة ≥0 أقل أو يساوي الصفر، هذا يعني أن الجدول هو جدول حل أمثل.

VI. حالات خاصة بنماذج النقل

هناك بعض الحالات الخاصة بنماذج النقل يمكن توضيحها في الآتي:

أ. حالة الإنحراف (الإنحلال، عدم الإنتظام):

تحدث عندما يكون عدد الخلايا المشغلة أقل من مجموع المراكز مضافا لها مجموع المصادر ومطروحا من الواحد ($m+n-1$)، ويمكن أن تكون في الجدول الأول أو أي جدول (ممكن تحدث في جدول الحل الأمثل)، ولا نقول إنحراف للنموذج وإنما نقول إنحراف لجداول النقل. وفي حالة حدوث هذه الحالة فإنه يستحيل الوصول إلى الحل الأمثل، وبالتالي يمكن معالجة هذه الحالة كالتالي:

- **في حالة النموذج من الشكل *Min***، فيتم تشغيل خلية من بين الخلايا الشاغرة وبكمية معدومة (تساوي0)، ويستحسن أن تكون الخلية التي بها التي بها أقل تكلفة، أو الخلية التي تسمح بتشكيل مسار مغلق مع بقية الخلايا المشغلة.
- **في حالة النموذج من الشكل *Max***، فيتم تشغيل خلية من بين الخلايا الشاغرة وبكمية معدومة (تساوي0)، ويستحسن أن تكون الخلية التي بها التي بها أكبر ربح، أو الخلية التي تسمح بتشكيل مسار مغلق مع بقية الخلايا المشغلة.

ب. حالة عدم التوازن:

تحدث عندما لا تتساوى الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة في الجدول، حيث يُفترض أن يكون نموذج النقل متوازنا قبل تطبيق أي طريقة للحل، وعليه في حالة إذا كانت:

- **الكميات المعروضة > الكميات المطلوبة:** نضيف مركزا (عمودا) وهميا بتكلفة تساوي 0، وبمقدار الفرق بين الكمية المطلوبة والكمية المعروضة ثم نواصل الحل.
- **الكميات المطلوبة> الكميات المعروضة:** نضيف مصدرا (سطرا) وهميا بتكلفة تساوي 0، وبمقدار الفرق بين الكمية المطلوبة والكمية المعروضة ثم نواصل الحل.

ت. حالة الحلول البديلة:

إذا وجد صافي التغير في التكلفة لخلية أو أكثر يساوي 0 في جدول الحل الأمثل، فإن يوجد حل بديل للنموذج في هذه الحالة.

ث. حالة الطرق الممنوعة: تظهر هذه الحالة في حالة عدم الرغبة في التوزيع من مصدر معين إلى مركز معين لظروف معينة مثلا: عدم توافر المواصفات في منتوج ما، طريق غير آمن، طريق غير معبد....؛ مما يستوجب تقييد (غلق) الطريق الممنوع، أي عدم التوزيع في تلك الخلية التي تربط بين المصدر والمركز المعنيين، وذلك بوضع تكلفة كبيرة جدا (*M*) في الخلية المعنية، ثم نواصل حل النموذج بالطرق المعتادة.

VII. تطبيقات عملية لنماذج النقل:

يمكن استعمال تقنيات النقل لحل مشاكل أخرى داخل المؤسسة منها على سبيل المثال:

- تحميل الآلات بأقل تكاليف ممكنة؛
- دراسة مشكلة التمويل؛
- دراسة مشكلة تنفيذ المشاريع؛
- تخطيط الشراء والتخزين؛
- تخطيط الإنتاج والنقل.

ملاحظة: ما يعاب على هذه الطريقة (طريقة النقل) هو إهمالها للجانب غير الكمي.

الفـــصــــــل الخامس:

مسائل التخصيص

(التعيين)

الفصل الخامس: مسائل التخصيص

I. تعريف نموذج التخصيص

تُعد مسائل التخصيص من الحالات الخاصة لمسائل النقل، حيث تعمل على تحقيق الإستخدام الأمثل للموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصى الأرباح أو تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن. كما أنها تتطلب تعيين عدد معين من العمال لإنجاز عدد من الوظائف، وذلك عن طريق تعيين عامل واحد لوظيفة واحدة.

II. فرضيات نموذج التخصيص:

بالإضافة إلى الفرضيات القائمة عليها نماذج النقل، هناك فرضيات إضافية لنماذج التخصيص هي:

- تساوي عدد الأسطر مع عدد الأعمدة (مصفوفة مربعة)، حيث تمثل الأسطر العمال المترشحون وتمثل الأعمدة الوظائف اللازم إنجازها؛
- أنه يمكن لكل العمال المترشحون القيام بأي وظيفة من الوظائف وإن اختلفت تكلفة القيام بوظيفة ما من عامل إلى آخر؛
- يمكن لكل عامل القيام بوظيفة واحدة فقط؛
- أن يكون الهدف من عملية التخصيص هو التعظيم أو التخفيض.

III. النموذج الرياضي لمسألة التخصيص:

بإفتراض أن:

n: عدد الأسطر؛

m: عدد الأعمدة؛

x_{ij}: تمثل الكميات المنقولة من المصدر i إلى المركز j؛

c_{ij}: التكلفة أو الإيراد الوحدوي لنقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى المركز j؛

S_i: الكميات المعروضة (المنتجة) في المصدر i؛

d_j: الكميات المطلوبة من المركز j.

Z: مجموع تكاليف أو عوائد التخصيص.

ومنه نموذج التخصيص هو كالتالي:

أ. **دالة الهدف:** والتي تكتب وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$Max/Min(z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\ x_{ij}$$

ب. **القيود:** تتمثل في:

- عدد الكميات المعروضة يساوي عدد الكميات المطلوبة أي: $\sum_{i=1}^{n} Si = \sum_{j=1}^{m} dj = 1$
- يجب أن تلبى كل الكميات المطلوبة تكون أي : $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = dj = 1$
- يجب توزع كل الكميات المعروضة أي : $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = Si = 1$

- قيمة X_{ij} إما 1 أو 0.

ت. شرط عدم السلبية: $X_{ij} \geq 0$.

IV. طرق حل نماذج التخصيص:

توجد طريقتين لحل مسألة التخصيص هما:

أ. <u>طريقة العد الكامل:</u>

تقوم هذه الطريقة على التحديد الكامل لجميع البدائل الممكنة لتوزيع عدد معين من العمال على عدد معين من الوظائف، ثم نختار البديل المناسب الذي يؤدي إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح، حيث يمكن ايجاد عدد البدائل كالتالي:

N!=n. (n-1). (n-2) ………3.2.1

كذلك تعد هذه الطريقة من أبسط الطرق استخداما في التخصيص، وتستخدم فقط في حال وجود ثلاث عمال لثلاث وظائف فقط، في حالة أكثر من ذلك لا يتم استخدام هذه الطريقة وإنما تستخدم الطريقة الهنغارية.

بالنسبة لخطوات إجراء طريقة العد الكامل فتتمثل في:

- إيجاد عدد البدائل الممكنة لمشكلة التخصيص؛
- كتابة جميع البدائل الممكنة لمشكلة التخصيص؛
- حساب اجمالي التكاليف أو الأرباح لكل بديل؛
- اختيار البديل الأمثل الذي يحقق أقل تكلفة أو اعلى ربح حسب هدف نموذج التخصيص.

<u>مثال: حالة تقليل التكاليف *Min*</u>

تسعى جامعة 20 أوت 1955 بسكيكدة إلى توظيف ثلاثة مهندسين لإنجاز ثلاثة وظائف، حيث تكلفة تعيينهم موضحة في الجدول التالي:

	الوظيفة 1	الوظيفة 2	الوظيفة 3
العامل *A*	15	14	8
العامل *B*	4	9	7
العامل *C*	7	2	9

المطلوب: أوجد أفضل بديل تعيين بحيث يكون أقل تكلفة ممكنة؟

الحل:

بما أن عدد الأعمدة = عدد الأسطر =3 (وبالتالي يمكن استخدام طريقة العد الكامل)، ومنه عدد البدائل الممكنة هو: **6**

3!=3.2.1=**6**

بالنسبة لترتيب جميع البدائل الممكنة لمشكلة التخصيص هي كالتالي:

البدائل	العامل A	العامل B	العاملC	التكلفة z /دج
1	الوظيفة 1	الوظيفة2	الوظيفة 3	33=9+9+15
2	الوظيفة 1	الوظيفة 3	الوظيفة 2	24
3	الوظيفة 2	الوظيفة 1	الوظيفة 3	27
4	الوظيفة2	الوظيفة 3	الوظيفة 1	28
5	الوظيفة 3	الوظيفة 1	الوظيفة 2	14
6	الوظيفة 3	الوظيفة2	الوظيفة 1	24

قرار التعيين: البديل الأفضل هو البديل الخامس الذي يحقق أقل تكلفة إجمالية للتعيين بمقدار: 14 دج، حيث: العامل A يعين في الوظيفة 3، العامل B يعين في الوظيفة 2، العامل C يعين في الوظيفية 1.

مثال: حالة تعظيم الأرباح *Max*

تسعى كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير بجامعة 20 أوت 1955 بسكيكدة إلى تعيين 3 رؤساء للأقسام التالية: (قسم علوم التسيير، قسم العلوم الإقتصادية، قسم العلوم التجارية)، بحيث يحقق تعيينهم أفضل عائد ممكن.

الجدول التالي يوضح عائد تعيينهم في المناصب السابقة:

	الوظيفة 1 (رئيس قسم علوم التسيير)	الوظيفة 2 (رئيس قسم العلوم الاقتصادية)	الوظيفة 3 (رئيس قسم العلوم التجارية)
العامل A	13	7	5
العامل B	8	6	7
العامل C	9	2	12

المطلوب: باستخدام طريقة العد الكامل ماهو البديل الأفضل الذي يحقق أعلى عائد ممكن للتعيين؟

الحل:

بما أن عدد الأعمدة = عدد الأسطر =3 (بالتالي يمكن استخدام طريقة العد الكامل)، ومنه عدد البدائل الممكنة هو: **6**

$3!=3.2.1=\mathbf{6}$

بالنسبة لترتيب جميع البدائل الممكنة لمشكلة التخصيص هي كالتالي:

البدائل	العامل A	العامل B	العاملC	التكلفة z /دج
1	الوظيفة 1	الوظيفة2	الوظيفة 3	31
2	الوظيفة 1	الوظيفة 3	الوظيفة 2	22
3	الوظيفة 2	الوظيفة 1	الوظيفة 3	27
4	الوظيفة2	الوظيفة 3	الوظيفة 1	23
5	الوظيفة 3	الوظيفة 1	الوظيفة 2	15
6	الوظيفة 3	الوظيفة2	الوظيفة 1	20

قرار التعيين (التخصيص):

البديل الأفضل هو البديل الثالث الذي يحقق أعلى عائد للتعيين بمقدار: 27 دج، حيث: العامل **A** يعين في الوظيفة2 (رئيس قسم العلوم الاقتصادية)، العامل **B** يعين في الوظيفة1 (رئيس قسم علوم التسيير)، العامل **C** يعين في الوظيفية 3 (رئيس قسم العلوم التجارية).

ملاحظة: ما يعاب على هذه الطريقة هو عدم إمكانية استخدامها عندما يكون عدد الأسطر (العمال) أو عدد الأعمدة (الوظائف) أكبر ثلاثة، حيث من الصعوبة استخدام هذه الطريقة لأنها لا تبين نوع البدائل (كيفيات التوزيع).

ب. <u>الطريقة الهنغارية (المجرية):</u>

تعتبر هذه الطريقة الأكثر استعمالا، حيث تستخدم لإيجاد حل لمشكلة (لمسألة- لنموذج) التخصيص (التعيين) إذا كان عدد الأسطر (عدد العمال أو عدد الأعمدة (عدد الوظائف) أكثر من ثلاثة، وذلك باتباع المراحل التالية (في حالة تقليل التكاليف Min):

- **مرحلة وضع الأصفار:** وفيها يتم الآتي:
  - وضع تكاليف نموذج التخصيص في شكل مصفوفة؛
  - نقوم بطرح أقل عنصر في كل سطر من جميع عناصر السطر نفسه (التخفيض الأول)؛
  - نقوم بطرح أقل عنصر في كل عمود من جميع عناصر العمود نفسه انطلاقا من التخفيض الأول (التخفيض الثاني)؛
  - بعد عملية التخفيض الثاني نبدأ بالسطر أو العمود الذي يوجد فيه صفر واحد ونؤطره (نضعه في إطار) ونشطب الأصفار الباقية في نفس السطر وفي نفس العمود، ثم ننتقل إلى السطر أو العمود الذي به صفران ونختار أحدهما ونؤطره ونشطب بقية أصفار السطر والعمود وهكذا حتى لا يبقى لدينا صفر بحاجة إلى تأطير أو تشطيب.
- **مرحلة إختبار أمثلية الحل:**
  - إذا كان **كل** سطر و**كل** عمود يحتوي على صفر واحد مؤطر فإن الحل الناتج هو: حل أمثل.
  - إذا كان كل سطر وكل عمود لا يحتوي على صفر واحد مؤطر فإن الحل الناتج ليس حل أمثل، وبالتالي يحتاج إلى تحسين.
- **مرحلة التحسين:** تتم هذه المرحلة وفق الخطوات التالية:
  - نشطب أصفار المصفوفة (بعد التخفيض الثاني) بأدنى عدد من الخطوط المستقيمة* (أفقي أو عموديا) أي **أقل من عدد الأسطر والأعمدة**، ويفضل اثناء عملية الشطب اختيار السطر أو العمود الذي به أكبر عدد من الأصفار وهكذا.

* في حالة الحل غير أمثل فإن عدد الخطوط المستقيمة (أفقيا أو عموديا) يكون أقل من عدد الأسطر أو عدد الأعمدة.

- بعد عملية الشطب يتم طرح أقل عنصر في المصفوفة من العناصر غير المشطوبة، ثم إضافة هذا العنصر إلى كل نقاط التقاطع (العناصر المشطوبة مرتين أي افقيا وعموديا)؛
- العناصر الأخرى المشطوبة وليست في حالة تقاطع تبقى كما هي؛
- نعيد عملية اختبار أمثلية الحل حتى نصل إلى الحل الأمثل.

ملاحظة: إذا بدأنا في عملية طرح أقل عنصر بالأعمدة قبل الأسطر فإن الطريقة صحيحة.

مثال:

مؤسسة ترغب في تعيين 4 مهندسين لإنجاز 4 مهام، حيث تكلفة تعيينهم موضحة في الجدول التالي:

المهام / العمال	1	2	3	4
A	20	60	50	55
B	60	30	80	75
C	80	100	90	80
D	65	80	75	70

المطلوب: أوجد أفضل تخصيص (توزيع– تعيين) بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن باستخدام الطريقة الهنغارية؟

الحل:

- **مرحلة وضع الأصفار:**

  - **طرح أصغر عنصر في كل سطر** : (التخفيض الأول)

المهام / العمال	1	2	3	4
A	0	40	30	35
B	30	0	50	45
C	0	20	10	0
D	0	15	10	5

  - **طرح أصغر عنصر في كل عمود** : (التخفيض الثاني)

المهام / العمال	1	2	3	4
A	0	40	20	35
B	30	0	40	45
C	0	20	0	0
D	0	15	0	5

- **مرحلة اختبار أمثلية الحل:**

نلاحظ أن كل الأسطر وكل الأعمدة مؤطرة ومنه هذا الحل هو حل أمثل، ومنه أفضل تعيين (تخصيص) هو كالتالي:

المهام / العمال	1	2	3	4	$\sum Si$
A	20 (1)	60	50	55	1
B	60	30 (1)	80	75	1
C	80	100	90	80 (1)	1
D	65	80	75 (1)	70	1
$\sum$**dj**	1	1	1	1	4

Z=75+80+30+20 = **205** دج

العمال		المهام
A	$\rightarrow$	1
B	$\rightarrow$	2
C	$\rightarrow$	4
D	$\rightarrow$	3

تعيين العامل A في المهمة، العامل B يعين في المهمة 2، العامل C يعين في المهمة 4، العامل D يعين في المهمة 3، لتحقيق أدنى تكلفة تقدر بـــ: 205 دج

V. تطبيق نموذج التخصيص لحل مشكلة التعظيم (*Max*):

في بعض الأحيان قد يكون هدف نموذج التخصيص هو التعظيم (الأرباح، الإنتاجية، المردودية، رقم الأعمال،...)، وبالتالي لحله بإحدى طرق الحل نتبع الخطوات التالية:

- تحويل مصفوفة ***Max*** إلى ***Min*** من خلال البحث عن أكبر عنصر في المصفوفة ثم طرحه من جميع عناصر المصفوفة، حيث يأخذ الفرق بالقيمة المطلقة، فنحصل على المصفوفة الجديدة؛
- حل المصفوفة الجديدة كأنها حالة تدنية ***Min*** وفق الخطوات الموضحة سابقا.
- عند الوصول للحل الأمثل يتم الرجوع للمصفوفة الأصلية لحساب قيمة الهدف.

VI. الحالات الخاصة لنماذج التخصيص:

هناك بعض الحالات الخاصة بنماذج التخصيص نذكر منها:

أ. حالة عدم التوازن: هي الحالة التي لا يتساوى فيها عدد الأسطر مع عدد الأعمدة، وبالتالي إذا كان عدد الأعمدة أكبر من عدد الأسطر نضيف سطرا وهميا بتكلفة تساوي صفر؛ أما إذا كان عدد الأسطر أكبر من عدد الأعمدة نضيف عمودا وهميا بتكلفة تساوي صفر، ثم نكمل الحل.

ب. حالة الحل البديل: في هذه الحالة نجدها عند الإختيار بين عدة أصفار أثناء عملية التأطير.

ت. حالة الطرق الممنوعة:وهي حالة استحالة العلاقة بين سطر ما وعمود ما، ففي حالة ***Min*** نضع في الطريق الممنوع أكبر تكلفة تقدر بـــ M أما في حالة ***Max*** نضع الصفر ثم نكمل الحل.

ث. وجود عناصر سالبة في المصفوفة: لا يمكن حل مسائل التخصيص في حالة وجود عناصر سالبة في المصفوفة، لذلك يجب تعديلها عن طريق طرح أصغر قيمة سالبة من كل عناصر المصفوفة ثم نكمل الحل.

4	-2	3
5	6	-1
2	8	0

$\longrightarrow$

6	0	5
7	8	+1
4	10	2

أقل عنصر سالب هو (−2)، وبالتالي نطرح (−2) من جميع عناصر المصفوفة، كما هو موضح أعلاه

VII. تطبيقات عملية لنماذج التخصيص:

- تخصيص عدد معين من الأجهزة لأداء مهام؛
- تخصيص عدد معين من العمال لشغل الوظائف؛
- تخصيص عدد معين الوكلاء للمناطق الجغرافية؛
- تخصيص عدد معين من وسائل النقل لخطوط نقل خارجية.

قائمة المراجع:

1. حامد سعد نور الشمرتي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي، عمان، الأردن، 2007.
2. حمدي طه، مقدمة في بحوث العمليات، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1996.
3. حمودي حاج صحراوي، رياضيات المؤسسة، الطبعة1، دار جيلطي للنشر، برج بوعريريج، الجزائر، 2014.
4. رابح بوقرة، بحوث العمليات، الجزء1، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، الجزائر، 2010.
5. رند عمران مصطفى الأسطل، بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية، الطبعة 1، جامعة قلسطين، 2016.
6. سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، الطبعة1، الجامعة المفتوحة، طرابلس، ليبيا، 2002.
7. منعم زمزير الموسوي، مقدمة في بحوث العمليات، الجامعة المفتوحة، عمان، الأردن، 1995.
8. يحياوي إلهام، رياضيات المؤسسة، جامعة الحاج لخضر – باتنة1، الجزائر، دون سنة نشر.