الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 20 أوت 1955- سكيكدة

مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة سنة ثانية علوم اقتصادية

محاضرات في الإحصاء 3

من إعداد: د. نادية سحاب

السنة الجامعية 2023/2022

المحتويات

مقدمة:

يحظى علم الإحصاء بمختلف فروعه بأهمية بالغة لما توفره الأساليب الإحصائية من إسهامات في شتى المجالات والتخصصات وبالرغم من تعدد التعاريف المتعلقة بعلم الإحصاء إلا أنها اجتمعت على أنه ذلك العلم الذي يختص بعمليات جمع البيانات الإحصائية وتبويبها وعرضها وتحليلها بقصد التوصل إلى استنتاجات تساعد على اتخاذ القرارات المناسبة، حيث ينقسم علم الإحصاء إلى قسمين الأول يدعى بالإحصاء الوصفي: والذي يهتم بتنظيم وفحص وعرض البيانات الإحصائية في صورة جداول أو رسوم بيانية أو أشكال هندسية والثاني يسمى بالإحصاء الاستدلالي، هذا الأخير يهدف إلى التوصل إلى استنتاجات تخص المجتمع قيد الدراسة بالاعتماد على عينات مأخوذة منه، وذلك باستخدام العديد من الأساليب والطرق والنظريات الإحصائية، وتعد نظرية المعاينة إحدى هذه الأساليب الإحصائية لأنها تمثل القاعدة الصلبة للاستدلال الإحصائي، حيث تهتم بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه والتي ترتكز عليها كل من نظرية التقدير واختبار الفرضيات بغية الوصول إلى استنتاجات واتخاذ القرارات اللازمة .

بناءا على ما تقدم تم إعداد هذه المطبوعة والتي تتناول أربعة فصول أساسية وفقا للمقرر الوزاري من خلال عرض الفصول التالية:

الفصل التمهيدي: الإطار المفاهيمي للإحصاء

تمهيد:

- **المجتمع الاحصائي**
- **العينة**
- **أهم التوزيعت الاحتمالية**
- **التوزيع الطبيعي**
- **توزيع كاي مربع**
- **توزيع Student**
- **توزيع فيشر**

تمهيـد:

يرتكز علم الإحصاء على جملة من المفاهيم الأساسية والتي ينبغي على الطالب فهمها والتحكم فيها ليسهل عليه فيما بعد فهم الفصول اللاحقة، وفيما يلي أهم هذه المفاهيم:

1-1 المجتمع الإحصائي population:[1]

يمكن تعريف المجتمع الإحصائي بأنه مجموعة من الوحدات أو المفردات التي تتصف بصفة مشتركة واحدة أو مجموعة من الصفات المشتركة بحيث تدور الدراسة الإحصائية حولها، وينقسم إلى قسمين:

1-1-1 مجتمع محدود: وهو الذي يكون فيه عدد محدود من المفردات مثل أخد عدد حبات برتقال في صندوق ما أو عدد تلاميذ سنة أولى ابتدائي من ابتدائية ما.

ملاحظة: يمكن التمييز بين المعلمة و الإحصاءة، حيث تعبر المعلمة (parameter) عن خاصية أو مقياس يميز المجتمع محل الدراسة مثل الوسط الحسابي U والانحراف المعياريδ، في حين تعتبر الإحصاءة (statistic) عن خاصية تميز العينة مثل الوسط الحسابي μ_x الانحراف المعياري δx.

2-1-1 مجتمع غير محدود: وهو الذي يكون فيه عدد الأفراد غير منتهي، و يمكن تمييز بعضها عن بعض مثل عدد النجوم في السماء في يوم صحو في مكان ما، عدد حبات قمح محصول مزرعة ما ....إلخ.

2-1 العينـــة (sample): هي جزء من المجتمع الإحصائي تمثله تمثيلا صحيحا بحيث كل فرد من أفراد المجتمع الإحصائي عنده نفس الفرصة بأن يكون ممثلا في العينة.

1-2-1 أنواع العينات:[2]

تنقسم العينات بصفة عامة إلى قسمين رئيسيين، والتي يمكن حصرها في العينات الاحتمالية و العينات غير الاحتمالية.

---

[1] عدنان بن ماجد بن عبد الرحمن بري، محمود إبراهيم هندي، أنور احمد محمد عبد الله، مبادئ الإحصاء والاحتمالات، جامعة الملك سعود، 1997 ص،03.

[2] سالم أبو ضاهر، العينات الإحصائية، موقع الفريد في الفيزياء 2017، ص 02.

أ-العينات الاحتمالية: probabilistic samples

هي تلك العينات التي يتم اختيارها دون التدخل من قبل الباحث بأي شكل من الأشكال، وتمتاز هذه العينات بأنها تمثل المجتمع الذي سحبت منه تمثيلا جيدا، كما أنها قابلة للعديد من أساليب التحليل الإحصائي، ويمكن تعميم نتائجها بثقة على المجتمع الإحصائي الذي تمثله، وتنقسم العينات الاحتمالية إلى خمسة أنواع رئيسية:

- **العينة العشوائية البسيطة: simple random sample**

يقصد بالعينة العشوائية البسيطة تلك العينة المسحوبة من مجتمع ما بحيث يكون لكل عنصر من عناصره فرصة متساوية لأن يكون من ضمن عناصر العينة، وهي أكثر أنواع العينات الإحصائية شيوعا تستخدم عندما يكون المجتمع الإحصائي متجانس من حيث الغرض أو الصفة التي تتعلق بها الدراسة، تدخل مفردات العينة عن طريق الصدفة البحتة، يتم الاختيار العشوائي يدويا عن طريق بطاقات متماثلة في الحجم و اللون أو عن طريق جداول الأرقام العشوائية أو عن طريق الحاسوب ولأجل تحقيق ذلك يتطلب الأمر تحديد مفردات المجتمع تحديدا كاملا وذلك عن طريق تشكيل قائمة تضم كل مفردات المجتمع تسمى بالإطار.

مثال: للحصول على عينة عشوائية مكونة من 5 عمال من بين 80 عامل في مؤسسة ما يجب أولا أن نرقم المجتمع من 1 إلى 80 لكل عامل ثم نبدأ عند نقطة عشوائية ولتكن من العمود الثالث والسطر الحادي عشر في جدول الأرقام العشوائية، ونقرأ 5 أرقام إما أفقيا أو عموديا مع حذف كل الأعداد التي تزيد عن 80.

- **العينة العشوائية المنتظمة: systematic random sample**

تمتاز العينة العشوائية المنتظمة كونها أسهل في تطبيقها و استخدامها من العينة العشوائية البسيطة رغم أنها تعطي نتائج مشابهة لها من حيث درجة تمثيل المجتمع الإحصائي محل الدراسة وإمكانية تقسيم نتائجها بثقة، ويتم سحب عناصر العينة المنتظمة بتحديد عنصرين أساسيين وهما: فترة السحب ونقطة البداية، وتحدد فترة السحب بقسمة حجم المجتمع على حجم العينة، أما نقطة البداية فهي أي رقم عشوائي نختاره يكون محصور بين "1" وطول فترة السحب.

مثال: إذا كان المجتمع الإحصائي يتألف من 25 مفردة وأردنا اختيار عينة حجمها 5 فإن:

$$\textbf{طول الدورة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{5}} = \mathbf{5}$$

ثم تحدد نقطة البداية ولتكن 1 وتكون العينات المسحوبة كما في الجدول التالي:

العينة 1	العينة 2	العينة 3	العينة 4	العينة 5
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

- **العينة العشوائية العنقودية : cluster random sample**

في هذه العينة يقسم المجتمع إلى عناقيد متنافرة بحيث يحوي كل عنقود مختلف أنواع العناصر الموجودة في المجتمع، ثم تسحب العينة عشوائيا من هذه العناقيد، حيث يتم اختيار المجتمع في هذه الحالة على أساس تنافر العناصر التي يكون كل عنقود ممثلا لكامل المجتمع، يمكن أن تكون العناقيد عبارة عن عمارات تحتوي على مساكن هذا إذا كانت الوحدة الإحصائية هي المسكن أو بلديات تحتوي على أسر أو يكون العنقود عبارة عن مدرسة بها مجموعة من التلاميذ، في كل هذه الحالات وعند سحب وحدات العينة نقوم باختيار مجموعة من العناقيد بشكل عشوائي ثم نسحب من كل عنقود مختار عدد معين من الوحدات حسب حجم العينة المطلوب.

- **العينة العشوائية الطبقية[3]: stratifird random sample**

يلجأ الباحث إلى هذا النوع من العينات عندما يكون المجتمع غير متجانس من حيث توزيع بعض الخصائص المتعلقة بهدف الدراسة فتسمح له بزيادة دقة النتائج، تتحدد هذه الطريقة من خلال تقسيم المجتمع إلى طبقات ،هذه الأخيرة عبارة عن مجموعات جزئية متجانسة وغير متقاطعة مع بعضها البعض وذلك على أساس الخصائص المتوفرة في المجتمع الأصلي، ويمكن اعتبار كل طبقة كعينة عشوائية بسيطة **فمثلا** من الممكن تقسيم الطلاب حسب تقديراتهم وبالتالي كل تقدير يمثل طبقة أو تقسيم مجموعة من المرضى حسب الحالة المرضية لهم.

[3]د. موساوي عبد النور . د .بركان يوسفي ، الإحصاء 2 ، دار العلوم للنشر والتوزيع ، 2010 ، ص 124

مثلا إذا أردنا دراسة المستوى المعيشي لولاية سكيكدة فإنه من المفيد جدا أن ندرس هذه الظاهرة في المدن والأرياف لأنهما يمثلان طبقتان أساسيتان يتكون منهما المجتمع السكيكدي.

- **العينة العشوائية متعددة المراحل : muli– stage randomsample**

تستعمل هذه الطريقة عندما يصعب الوصول مباشرة إلى كافة عناصر المجتمع المستهدف، حسب هذه الطريقة ليس من الضروري الحصول على إطار سحب كامل لعناصر المجتمع وخاصة في المرحلة الأخيرة،

في هذا النوع يتم اختيار وحدات الدراسة على مرحلتين أو أكثر **مثلا** إذا أردنا القيام بدراسة حول أسر مدينة ما نقوم في مرحلة أولى باختيار عينة من الدوائر، ثم في مرحلة ثانية نختار من كل دائرة عينة أخرى من الأسر وهنا نكون قد مررنا بمرحلتين من اجل اختيار الوحدات.

- المرحلة الأولى: اختيار عينة من الدوائر
- المرحلة الثانية: اختيار عينة من الأسر.

أما إذا كانت وحدة الاختيار هي الأفراد فإنه يمكننا كمرحلة ثالثة سحب عينة من الأفراد في كل أسرة.

ب – العينات غير الاحتمالية:

يوجد أنواع عدة للعينات غير الاحتمالية تختلف باختلاف اتجاهات الباحثين والتي سوف نوجزها فيما يلي:

- **العينة العرضية :Accidontal sample**

يعتمد في اختيار العينة العرضية على المصادفة (الصدفة) ، تمتاز هده الطريقة بتوفير الوقت والتكاليف، وإذا كان المجتمع المستهدف على درجة كبيرة من التجانس فإنه يمكننا الحصول على معلومات موثوقة لكنها في حال عدم تجانس عناصر المجتمع فإنها لا تخلو من مخاطرة التحيز .

- **عينة الحصص : Quota sample**

تقوم هذه الطريقة على تحديد حصة لكل مجموعة أو طبقة من طبقات المجتمع المدروس ثم تستخدم طريقة المصادفة في اختيار مفردات العينة وتمتاز هذه الطريقة في كونها أقل تحيزا في العينات غير الاحتمالية، عمليا تكون مفيدة في حالة عدم توفر أطر سحب العينات لطبقات المجتمع، لكنها تحمل مخاطر التحيز عندما لا

يتحقق التوازن بين حصة الطبقات من عناصر العينة، من بين **الأمثلة** اختيار عينة من المدخنين وغير المدخنين في المجتمع إذا كان المتغير محل الدراسة يتعلق بالتدخين.

1-3 أهم التوزيعات الاحتمالية

1-3-1: التوزيع الطبيعي

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة لانه اكثر استخداما في الظواهر المتعلقة بالحياة اليومية مثل الأطوال الأوزان السن .... الخ ، شكله جرسي متماثل حول الوسط الحسابي ومعتدل، وكلما تحركت بعيدا عن الوسط الحسابي في كلا الاتجاهين اقتربت من التوزيع الطبيعي من المحور الأفقي، دالة احتماله تعطى بالعلاقة التالية:

$$\int \boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} . exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-u}{\sigma}\right)^2\right]}$$

أ – التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)

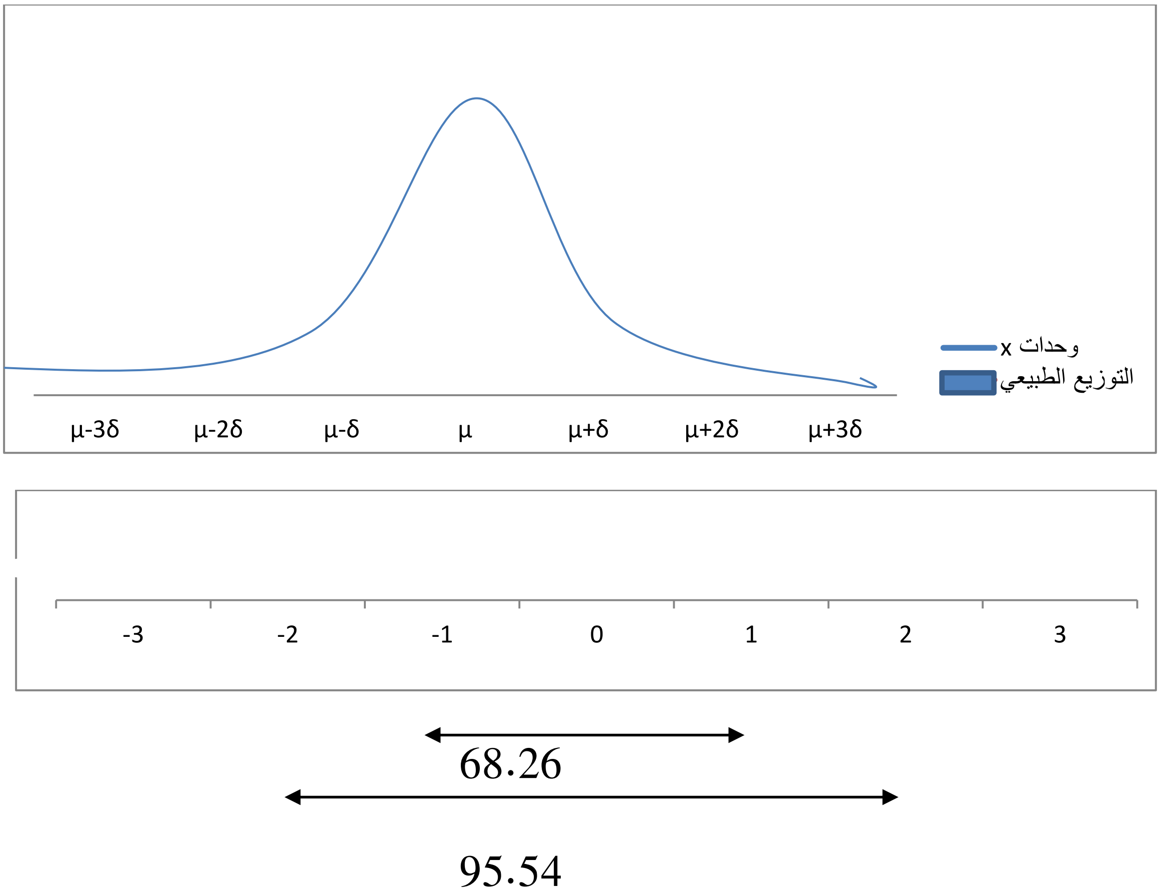
التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) هو توزيع طبيعي وسط الحسابي 0 و انحرافه المعياري 1($\delta = 1$، μ=0)

يمكن تحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي قياسي أي من ($x \rightarrow z$) حسب العلاقة التالية:

$Z = \frac{x-\mu}{\delta}$ ونكتب: $x \sim N(\mu, \delta^2)$ $Z \sim N(0,1)$

تحت هذه الشروط نجد أن 68،26% من هده المساحة تقع تحت المنحنى الطبيعي القياسي بين إحداثيتين رئيسيين ($\mu \pm 1\delta$) و95.54% تقع بين ($\mu \pm 2\delta$) و 99.74% تقع بين ($\mu \pm 3\delta$).

وهو ما يبينه الشكل الموالي:



مثال:

نفترض أنه لدينا X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 10 وانحراف معياري قيمته 2. أوجد احتمال أن يكون X محصورا بين 8 و12؟

الحل:

$$P(8 \leq X \leq 12) = P\left(\frac{8-10}{2} \leq Z \leq \frac{12-10}{2}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)$$

$$= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)]$$

$$= 2P(Z \leq 1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = \mathbf{0.6826}$$

1-3-2 توزيع كاي مربع :

يعد توزيع كاي مربع من بين أهم التوزيعات الاحتمالية استخداما خاصة فيما يتعلق باختبار الفروض اختبار جودة المطابقة والتجانس والاستقلالية والتباين ....الخ.

يتوزع المتغير العشوائي X وفق توزيع كاي مربع بدرجات n إذا كانت دالة كثافة احتماله كما يلي :

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} X^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}} & , \quad X > 0 \\ 0 & , X \leq 0 \end{cases}$$

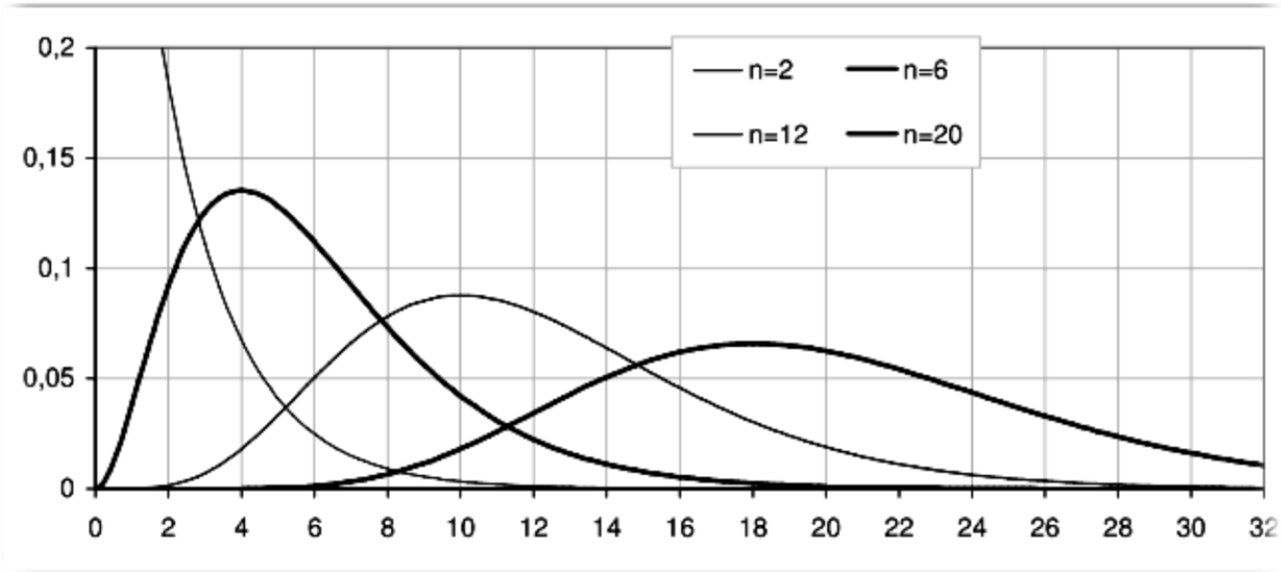
ونرمز له بالرمز $x \sim \chi^2{}_{(n)}$

حيث:

E(x)=n

V(x)=2n

تعتمد دالة كثافة احتمال هذا التوزيع على n، حيث أن لكل قيمة n شكل دالة خاص بها .



المصدر : https://math.unice.fr /statL2/ **COURS5.PDF**

3-3-1 توزيع ستيودنتstudent

تم اشتقاق توزيع ستيودنت (T) من التوزيعين توزيع كاي مربع والتوزيع الطبيعي الطبيعي، لهذا التوزيع علاقة قوية بالعينات العشوائية له تطبيقات عديدة في مجال الإحصاء الإستنتاجي بحيث:

إذا كان X و Y متغيران عشوائيان مستقلان أي: $X \sim N(0.1)$ و $Y \sim x^2{}_{\text{n}}$

فإن $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$

يسمح توزيع T بدرجات حرية n وتكون دالة كثافة احتماله كما يلي :

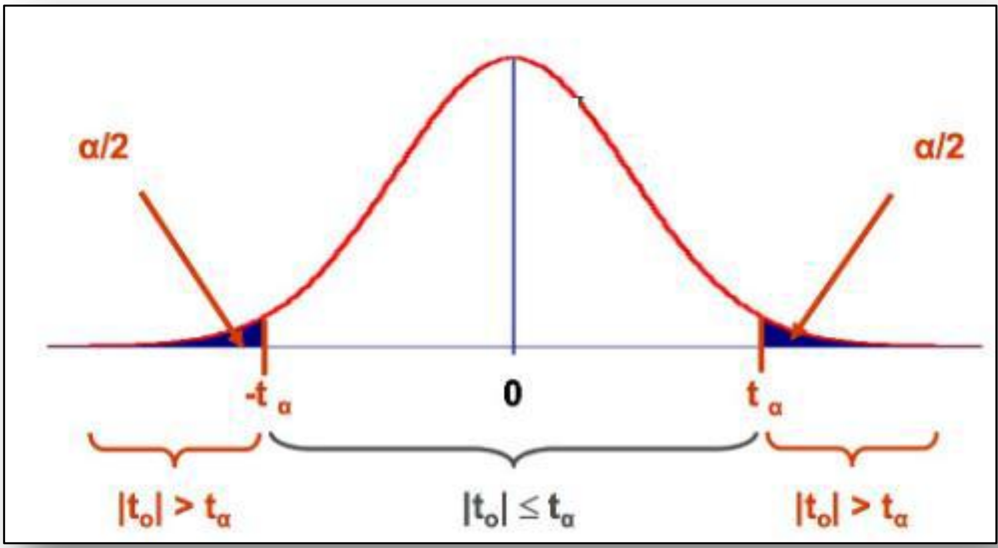
$$f_T(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}.\Gamma\sqrt{1/2}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

$$-\infty < t < +\infty$$

يتم حساب الاحتمال حسب الصيغة التالية:

$$\mathbf{P(T \geq t_{(\alpha,\,n)}) = \int_{(\alpha,n)}^{\infty} f\,(T)dt = \alpha}$$

التمثيل البياني:



1-3-3-1 خواص توزيع T

لتوزيع t مجموعة من الخواص العامة من بينها:

- شكله يشبه التوزيع الطبيعي إلا أنه منخفض عنه.
- أن $f_T(t)$ متماثلة ولها شكل جرسي يشبه شكل التوزيع الطبيعي وكلما كانت كبيرة فإن التوزيع t يقترب من التوزيع الطبيعي.أي عندما تكون $n \to \infty$ فإن:

$$f_T(t) \to \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} . exp^{-\frac{t^2}{2}}$$

- إذا كانت n صغيرة فإن توزيع t يختلف بشكل واضح عن التوزيع الطبيعي.
- توزيع t أحادي المنوال, له قيمة واحدة تقابل T=0
- يتقارب طرفيه من الصفر عندما T→ +∞ إلا أنه أبطأ من تقارب التوزيع الطبيعي

4-3- توزيع فيشر :

يعتبر توزيع فيشر من أهم التوزيعات الاحتمالية التي تستخدم في الإحصاء الاستنتاجي كاختبار الفروض المتعلقة بتحليل التباين واختبار معنوية خطوط الانحدار .....إلخ.

يعرف توزيع فيشر كما يلي: إذا كان x و y متغيرين عشوائيين ومستقلين، وكان x متغير يتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية m و y يتبع نفس التوزيع بدرجة حرية n فإن f كمتغير عشوائي $\left(f = \frac{x/m}{y/n}\right)$ له توزيع (F) بدرجة حرية m و n ونكتب$\mathrm{f} \to \mathrm{f(m,n)}$: وتكون دالة احتماله وفق الصيغة التالية:

$$\mathbf{h_f(f)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m+n}}{\mathbf{2}}\right)\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}\right)^{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}}}{\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}\right)} \cdot \dfrac{\mathbf{f}^{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}-\mathbf{1}}}{\left[\mathbf{1}+\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}\mathbf{f}\right]^{\left(\frac{\mathbf{m+n}}{\mathbf{2}}\right)}}, \boldsymbol{f} < 0 \\ \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{f} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

بعض خصائص توزيع فيشر

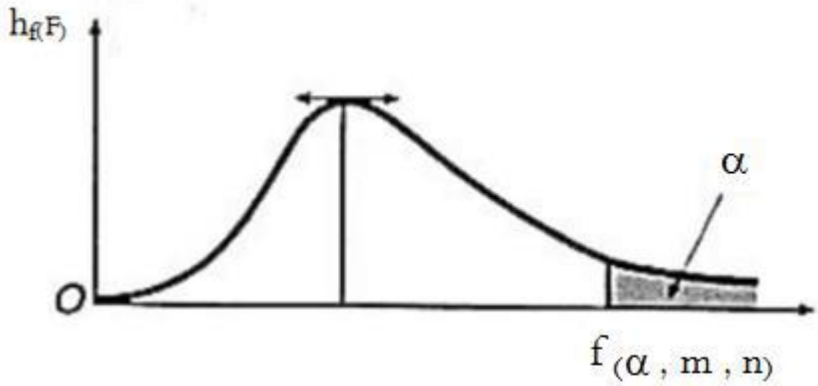
- كلما اقترب f إلى ما لانهاية $\mathrm{f} \to \infty$) فإن دالة الكثافة تقترب من الصفر$h_f(F) \to 0$) .
- إذا كانت $m > 2$)وكلما كانت $f \to 0$ فإن دالة الكثافة تقترب من الصفر $h_f(F) \to 0$).

$\boldsymbol{F(\propto,m,n)=F(1-\propto,n,m)}$-

$$\boldsymbol{P(F_{(m,n)} \geq f_{\;(\alpha,m,n)}) = \int_{f_{\alpha,m,n}}^{\infty} h_f\;(F)df = \;\alpha}$$

ويمكن تمثيل منحنى فيشر حسب درجات الحرية كما في الشكل الموالي:

التمثيل البياني لتوزيع فيشر



ويتم استخراج قيم α m , n) من جدول توزيع فيشر وفق مستوى المعنوية α و درجتي الحرية m و n

مثلا من جدول فيشر :

إذا كان: $\alpha = 0.025,\ m = 8, n = 10 \Rightarrow f_{0.025,8,10} = 3.85$

$\alpha = 0.05, \quad m = 4, n = 6 \Rightarrow f_{0.05,4,6} = 4.53$

الفصل الأول: نظرية توزيع المعاينة

تمهيد:

- **توزيع المعاينة للمتوسط**
- **توزيع المعاينة للنسبة**
- **توزيع المعاينة للتباين**
- **توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين**
- **توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين**
- **توزيع المعاينة للنسبة بيت تباينين**
- **سلسلة تمارين الفصل الأول.**

تمهيد:

في الكثير من الأحيان يصعب علينا جمع المعلومات الإحصائية من كل الوحدات التي تشكل المجتمع المدروس لما يكلفه ذالك من جهد، مال ووقت أو نظرا للمشاكل والعوائق التي تعترضنا، وللتغلب على ذلك يمكن اختيار جزء من المجتمع وهو ما يسمى بالعينة، حيث تفيدنا المعلومات المتوفرة من العينات بمعلومات ومؤشرات عن المجتمع كله، ومن مميزات العينة أنها أقل تكلفة وأكثر سرعة وشمولا .....الخ.

يطلق على التوزيع الاحتمالي لجميع القيم المتعلقة بخواص العينة بتوزيع المعاينة، والذي بدوره يشمل توزيع المعاينة للمتوسط، توزيع المعاينة للنسبة، توزيع المعاينة للتباين، توزيع المعاينة للفروق و توزيع المعاينة للنسبة بين تباينين، وهو ما سنتناوله من خلال هذا الفصل.

2-1 توزيعات المعاينة

كما هو معلوم إذا كان توزيع المجتمع يمثل توزيعا لجميع قياسات مفردات المجتمع فإن توزيع المعاينة هو توزيع القيم الفردية التي تتضمنها العينة، والذي يشمل توزيع المعاينة للمتوسط، توزيع المعاينة للنسبة، توزيع المعاينة للفروق، توزيع المعاينة للتباين وتوزيع المعاينة للنسبة بين تباينين .

2-1-1 توزيع المعاينة للمتوسط

ليكن لدينا مجتمع ما: $X_1 . X_2 ، X_3 \ldots \quad X_n.$

قمنا بسحب كل العينات الممكنة منه ذات الحجم n وقمنا بحساب متوسط كل هذه العينات:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ , \bar{x}_3 \ldots \ldots \quad \bar{x}_n.$$

هذه المتوسطات تختلف عن بعضها البعض، التوزيع الاحتمالي لهذه المتوسطات يسمى بتوزيع المعاينة للوسط والذي بدوره له وسط يرمز له بـ: $\mu_{\bar{x}}$ ، وتباين يرمز له بـ : $\delta^2{}_{\bar{x}}$ ، هذا التوزيع يمتاز بالخواص التالية:

- **الأمل الرياضي** $E(x)$: يطلق عليه متوسط المتوسطات بحيث :

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$$

- **الانحراف المعياري:** نرمز له بالرمز $\delta_{\bar{x}}$ حيث نميز بين الحالتين التاليتين:

أ – حالة السحب مع الإعادة أو من مجتمع غير محدود:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

ب – حالة السحب من مجتمع محدود (السحب بدون إعادة) أو ($\frac{n}{N} \geq 0.05$) فإن:

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} . \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

يطلق على المقدار $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ معامل التصحيح (معامل الإرجاع).

مثال (2−01): لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية: 1،2، 3، 4 قمنا بسحب جميع العينات الممكنة ذات الحجم 02.

- **حالة السحب مع الإرجاع:**

$$E(\bar{x}) = \mu$$

- إيجاد متوسط كل عينة من العينات الممكن سحبها وإثبات أن:

$$E(\bar{x}) = \mu \quad . \quad \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$\mu = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

X	$P(x)$	$XP(x)$	$X^2P(x)$
1	0.25	0.25	0.25
2	0.25	0.5	1
3	0.25	0.75	2.25
4	0.25	1	4
Σ	1	2.5	7.5

$$\delta_x = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{1.25} = 1.118$$

عدد العينات الممكنة هي: $A^n = 4^2 = 16$ عينة.

العينات هي: (1.1)،(1.2)،(1.3)،(1.4)،(2.1)،(2.2)،(2.3)،(2.4)،(3.1)،(3.2)

(3.3) ،(3.4) ، (4.1) (4.2) (4.3) (4.4).

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \Sigma\bar{x}.P(\bar{x}) = 2.5$$

$$E\bar{x}^2 = \Sigma\bar{x}^2.P(\bar{x}) = 6.875$$

$$\delta_{\bar{\mathrm{x}}} = E(\bar{x}^2) - [\mathrm{E}(\bar{\mathrm{x}})]^2 = 6.875 - (2.5)^2 = 0.625$$

$$\delta_{\bar{\mathrm{x}}} = \sqrt{\delta^2{}_{\bar{\mathrm{x}}}} = \sqrt{0.625} = 0.790$$

$$\delta_{\bar{\mathrm{x}}} = \frac{\delta_{\bar{\mathrm{x}}}}{\sqrt{\mathrm{n}}} = \frac{1.118}{\sqrt{2}} = 0.790$$

$\bar{x}$	عدد العينات	$P(\bar{x})$	$\bar{x}P(\bar{x})$	$\bar{x}^2 P(\bar{x})$
1	1	1/16	1/16	1/16
1.5	2	2/16	3/16	9/32
2	3	3/16	6/16	12/16
2.5	4	4/16	10/16	25/16
3	3	3/16	9/16	27/16
3.5	2	2/16	7/16	49/32
4	1	1/16	4/16	1
Σ	**16**	**1**	**2.5**	**6.875**

- **حالة السحب بدون إعادة:**

عدد العينات الممكن سحبها : $C_4^2 = 6$

$$\mathrm{E}(\bar{x}) = \Sigma\bar{x}.P(\bar{x}) = 2.5$$

$$\mathrm{E}(\bar{x}^2) = \Sigma\bar{x}^2.P(\bar{x}) = 6.667 - (2.5)^2 = 0.417$$

$$\delta_{\bar{x}} = \sqrt{\delta^2{}_{\bar{x}}} = \sqrt{0.4.17} = 0.6457$$

$$\frac{\delta_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{0.417} = \sqrt{0.417} = 0.6457$$

$$\frac{\delta^2{}_X}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{1.25}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) = \frac{2.5}{6} = 0.417$$

العينة	$\bar{x}$	$P(\bar{x})$	$\bar{x}P(\bar{x})$	$\bar{x}^2P(\bar{x})$
2.1	1.5	1/6	1/4	0.375
3.1	2	1/6	1/3	0.67
4.1	2.5	1/6	5/6	1.04
3.2	2.5	1/6	0.5	1.04
4.2	3	1/6	0.5	1.5
4.3	3.5	1/6	7/12	2.04
Σ		**1**	**2.5**	**6.667**

2-1-1-1: طبيعة توزيع المعاينة

2-1-1-1 طبيعة توزيع المعاينة للمتوسط

يعتمد شكل توزيع المعاينة للمتوسط على شكل توزيع المجتمع الأصلي المسحوب منه العينات، وهنا نجد أنفسنا أمام حالتين، الحالة الأولى نجد أن المجتمع الذي سحبت منه العينة معروف ويتبع التوزيع الطبيعي والثانية أن المجتمع الأصلي غير معروف توزيعه وهنا نكون أمام الحالات التالية:

أ- **إذا كان المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه معلوم** أي أن: $X \sim N(\mu . \sigma^2)$ فإن توزيع المعاينة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ ونكتب: $\bar{\mathbf{X}} \sim N\left(\mu . \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$\mathbf{Z} = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \mu_{\overline{\mathbf{X}}}}{\sigma_{\overline{\mathbf{X}}}} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0}; \mathbf{1})$$

– مع تزايد حجم العينات أي $(n \to \infty)$ فإن توزيع المعاينة للمتوسط يقترب من التوزيع الطبيعي بصرف النظر عن شكل المجتمع الأصلي ويعتبر التقريب جيدا عندما تكون $(n \geq 30)$ وذلك استنادا إلى نظرية النهاية المركزية [1].

يمكن إيجاد احتمال أن يكون $\overline{X}$ لعينة عشوائية داخل فترة ما بحساب قيم Z للفترة بحيث:

$$\mathbf{Z} = \frac{\overline{\mathbf{X}} - \mu_{\overline{\mathbf{X}}}}{\delta_{\overline{\mathbf{X}}}} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{0}; \mathbf{1})$$

مثال (2−02): ما هو احتمال أن يكون وسط عينة عشوائية حجمها 25 عنصر مأخوذة من مجتمع موزع طبيعيا بمتوسط 90 و انحراف معياري 60 أكبر من 100 ؟

الحل:

لدينا: $n = 25\,. \qquad \mu = 90. \qquad \delta = 60$

بما أن المجتمع موزع طبيعيا وتباينه معلوم فإن توزيع المعاينة للوسط يتبع التوزيع الطبيعي بحيث:

$$\mathrm{U}_{\bar{x}} = \mathrm{U} = 90$$

$$\delta_{\overline{\mathrm{x}}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{25}} = 12$$

$$P(\bar{x} > 100) = P(\frac{\bar{x} - M}{\delta_{\bar{x}}} > \frac{100 - 90}{12})$$

$$P(Z > 0.83)$$

$$1-\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 0.83)$$

$$1-F(0.83)$$

[1] دومينيك سالفادور ، الإحصاء والاقتصاد القياسي الطبعة الخامسة إلى العربية ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية مصر 2001 ، ص76.

$1-0.7967 = 0.2033$ أي 20.33%

ب – إذا كان المجتمع طبيعي وتباينه مجهول وحجم العينة صغير:

إذا أخذنا عينة عشوائية من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه $\boldsymbol{\delta_1^2}$ مجهول وكان حجم العينة صغيرا بحيث ($n < 30$) فإن توزيع المعاينة للمتوسط يخضع لتوزيع student بدرجات حرية (n−1) بحيث:

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{N}}$$

مثال(2−03): إذا كان أطوال طلاب إحدى الثانويات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 160 سم، سحبنا عينة عشوائية من 04 طلاب، ما هو احتمال أن يقل متوسطها عن 166 سم إذا كان الانحراف المعياري للعينة يساوي 10 سم ؟

الحل :

لدينا: S=10 μ =160 n =4

بما أن المجتمع طبيعي وتباينه مجهول وحجم العينة صغير (n =4< 30) ، فإن متوسط أطوال الطلبة في العينة يتبع توزيع student

$$P(\bar{x} < 166) = P\left(t < \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right) = P\left(t < \frac{166-160}{10/\sqrt{4}}\right)$$

$$=P(t < 1.2) = 0.8849$$

2−1−2 توزيع المعاينة للنسبة

لنفترض أنه لدينا مجتمع غير منته يتبع التوزيع الثنائي، وإذا كان P احتمال وقوع حادث ما (احتمال النجاح) فإن q هو احتمال عدم وقوع هذا الحادث (حادثان مستقلان) ، لنعتبر كل العينات الممكنة ذات الحجم n المسحوبة من هذا المجتمع، حيث نرمز إلى نسبة نجاح العينة بـ : $\hat{P}$

إذا توزيع المعاينة للنسبة يقترب من التوزيع الطبيعي وله الخواص التالية:

أ – الأمل الرياضي:

$$E(\hat{P})=\mu_{\hat{P}} = P$$

ب – الانحراف المعياري: $\delta_{\hat{p}}$ ، هنا نكون أمام حالتين

- إذا كان السحب مع الإعادة من مجتمع غير محدود:

$$\delta_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{p.q}{n}}$$

- إذا كان السحب بدون إعادة من مجتمع محدود $(\frac{n}{N} \geq 0.05$ فإن: $\delta_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{p.q}{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

ومنه فإن القيمة المعيارية تعطى بالصيغة التالية: $Z=\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}}$

مثال (2–04): إذا علمت أن 35 % من الحوادث التي تقع في العاصمة سببها السرعة الفائقة، تم اختيار عينة عشوائية من 100 حادث مسجل، أوجد احتمال أن يكون 45% من الحوادث أو أكثر كان نتيجة للسرعة ؟

الحل:

لدينا : $q = 1 - 0.35 = 0.65$ $p=0.35$ $n=100$

$$E(\hat{P})=P = 0.35$$

$$\delta_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}}.\sqrt{\frac{0.35(0.65)}{100}}$$

$$\delta_{\hat{P}}=\sqrt{0.002275} = 0.0477$$

$$P(\hat{p} \geq 0.45) = P(\frac{\hat{p}-p}{\delta_{\hat{P}}} \geq \frac{0.45-0.35}{0.0477})$$

$$=P(Z \geq 2.1)$$

$$= 1 - P(Z < 2.1)$$

$$=1 - F(0.9821) = 0.0179$$

2-1-3 توزيع المعاينة للتباين

إذا كان لدينا مجتمع ما، وتم سحب عينة عشوائية منه حجمها n وتباينها S^2 فإن متوسط تباين العينة يعطى بالعلاقة التالية: $E(S^2) = \mu_{S^2} = \delta^2$

إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي فإن: $\frac{(n-1)S^2}{\delta^2} = \frac{nS^2}{\delta^2}$ ونكتب :

وهو توزيع كاي مربع $$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\delta^2}$$

مثال (2-05): ليكن لدينا مجتمع طبيعي حجمه 100 نسحب منه عينة عشوائية حجمها : $n = 16$

- ما هو احتمال أن يكون تباين العينة أقل من أو يساوي 10 علما أن تباين المجتمع يساوي 80 ؟

الحل :

$$P(S^2 \leq 10) = P(\frac{(n-1).\ S^2}{\delta^2} < \frac{15(10)}{80})$$

$$=P(X_{15}^2 < 1.875)$$

$$=1-P(X_{15}^2 \geq 1.875)$$

بالاعتماد على الجدول الإحصائي لكاي مربع عند درجة حرية 15 نجد: $1-\mathbf{0.995} = 0.05$

2-1-4 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين

2-1-4-1 حالة عينتين مستقلتين

أ- **حالة مجتمعين طبيعيين و δ_1^2 و δ_2^2 معلومان**

إذا تم سحب عينة حجمها n_1 و متوسطها $\bar{X}_1$ من مجتمع طبيعي متوسطه u_1 وتباينه δ_1^2 وعينة عشوائية أخرى حجمها n_2 متوسطها $\bar{X}_2$ من مجتمع طبيعي آخر متوسطه u_2 وتباينه δ_2^2 (العينتان مستقلتان). فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $u_1 - u_2$ وتباين :

$$\delta^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}$$

- إذا كان حجم العينتين كبير بغض النظر عن طبيعة توزيع المجتمعين طبيعيين أو غير طبيعيين يكون توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي العينتين وفق الصيغة التالية :

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N\left(u_1 - u_2 : \frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}\right)$$

وعليه نكتب:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (u_1 - u_2)}{\delta_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} \sim N(0\,;1)$$

مثال (2−06): إذا علمت أن الإنتاج السنوي لأحد مناجم الذهب يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 150 طن وانحراف معياري 20 طن، بينما الإنتاج السنوي لمنجم آخر يتوزع طبيعيا بمتوسط قدره 125 طن وانحراف معياري 25 طن، تم اختيار عينة عشوائية من إنتاج 5 أشهر للمنجم الأول وعينة عشوائية من إنتاج 5 أشهر للمنجم الثاني، ما احتمال:

- أن يكون متوسط عينة من إنتاج المنجم الأول أصغر من أو يساوي متوسط عينة من إنتاج المنجم الثاني ؟
- أن يكون الفرق بين متوسطي عينتي الإنتاج أكبر من أو يساوي 60 طن ؟

الحل:

لدينا: $\delta_1 = 20,\ \ u_1 = 150\ ,\ n_1 = 5$

$\delta_2 = 25\ ,\ u_2 = 125\ ,\ n_2 = 5$

$u_1 - u_2 = 150 - 125 = 25$

$$\delta_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1}+\frac{\delta_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(20)^2}{5}+\frac{(25)^2}{5}} = \sqrt{205} = 14.32$$

$$P(\bar{X}_1 \leq \bar{X}_2) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq 0$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq 0 = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (u_1 - u_2)}{\delta_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} \leq \frac{0-25}{14.32}\right)$$

$$=P(Z \leq -1.75) = P(Z \geq 1.75)$$

$$= 1 - P(Z < 1.75)$$

$$= 1 - F(1.75)$$

$$1-0.9599=\mathbf{0.04}$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \geq 60 = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (u_1 - u_2)}{\delta_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} \geq \frac{60-25}{14.32}\right)$$

$$=P(Z \geq 2.44)$$

$$= 1 - P(Z < 2.44)$$

$$= 1 - F(2.44)$$

ب- حالة تباينا المجتمعين مجهولان وحجم العينتين صغيرتين:

إذا كانت العينتين مستقلتين وصغيرتي الحجم وتباينا المجتمعين مجهولان نستبدلهما بتباينا العينتين S_1^2 و S_2^2 ، فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطهما يتبع توزيع ستيودنت وهنا نميز بين حالتين: حالة تباينا المجتمعين متساويين و حالة تباينا المجتمعين غير متساويين.

ج - حالة $\boldsymbol{\delta_1^2}$ و $\boldsymbol{\delta_2^2}$ مجهولان ومتساويان

إذا كان $\boldsymbol{\delta_1^2} = \boldsymbol{\delta_2^2}$ فإن التباين المشترك بينهما مجهول وبالتالي نستبدله بتباين العينتين S_1^2 و S_2^2 حيث يكون تقدير التباين هو متوسط مرجح للقيم S_1^2 و S_2^2 وتكون الترجيحات على أساس حجم العينتين، ولكي يكون تقدير التباين غير متحيز لـ δ^2 فإننا نستخدم درجات الحرية (n_1-1) و (n_2-1) كترجيحات بدلا من n_2 و n_1

وعليه فإن مقدر التباين المشترك هو S_p^2 و الذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1).\ S_{1+}^2 (n_2 - 1).\ S_2^2}{n_1 - n_2 - 2}$$

ويكون التوزيع t كما يلي :

$$\mathbf{t} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_p^2.\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

مثال (2−07): تم سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين n_2 و n_1 حجمهما على الترتيب 16, 25 فكان تبايناهما $S_1^2 = 4$ و $S_2^2 = 7$ من مجتمعين مجهولين ومتساويي التباين علما أن: $u_1 = 30$ و $u_2 = 28$

- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أقل من 03 ؟

الحل: لدينا:

$$S_1^2 = 4،\ \ u_1 = 30,\ n_1 = 16$$

$$S_2^2 = 7\ ،\ u_2 = 28\ \ ،\ \ n_2 = 25$$

بما أن المجتمعين مجهولين وتباينهما مجهولان ومتساويان فإن الفرق بين متوسطي العينتين يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 3 = P\left(T < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (u_1 - u_2)}{\sqrt{S_p^2.\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}\right)$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1).\ S_1^2 (n_2 - 1).\ S_2^2}{n_1 - n_2 - 2} = \frac{(16 - 1).\ S_1^2 (25 - 1).\ S_2^2}{16 - 25 - 2}$$

$$S_p^2 = 5.846$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) < 3 = P\frac{(3 - (30 - 28))}{\sqrt{5.846.\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25}\right)}} = 1.30$$

$$P(\bar{X}_1-\bar{X}_2)<3 = P(T<1.30=0.9032)$$

د- حالة δ_1^2 و δ_2^2 مجهولان وغير متساويان

إذا كان δ_1^2 . δ_2^2 مجهولان وغير متساويان $\delta_1^2 \neq \delta_2^2$ فإن الإنحراف المعياري المقدر للفرق بين متوسطي العينتين يعطى بالعلاقة التالية :

$$\delta_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

فإن الفرق بين متوسطي العينتين يتبع توزيع t وفق العلاقة التالية:

$$t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(u_1-u_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

مثال (2-08): نسحب عينتين عشوائيتين مستقلتين حجمهما $n_1=25$ ، $n_2=20$ ، تباينهما $S_1^2=6$ ، $S_2^2=4$ من مجتمعين تباينهما مجهولان وغير متساويان.

- أوجد احتمال أن يكون الفرق بين متوسطي العينتين أكبر من 6 علما أن: $u_1=15$ ، $u_2=10$

$$P(\bar{X}_1-\bar{X}_2)>6 = P\left(t>\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(u_1-u_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\right)$$

$$P\left(t>\frac{6-(15-10)}{\sqrt{\frac{6}{15}+\frac{4}{10}}}\right)$$

$$P(t>1.51)$$

2-1-5 توزيع المعاينة للفرق بين نسبتين

إذا كان لدينا عينتين عشوائيتين مستقلتين و كبيرتين مسحوبتان من مجتمعين ما فإن توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي العينتين $\left(\widehat{\mathrm{P}}_1-\widehat{\mathrm{P}}_2\right)$ يتبع التوزيع الطبيعي تقريبيا بمتوسط $u_{\widehat{\mathrm{P}}_1-\widehat{\mathrm{P}}_2}=\mathrm{u}_{\mathrm{p}_1}-\mathrm{u}_{\mathrm{p}_2}=\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2$

وانحراف معياري: $\delta_{\widehat{\mathrm{P}}_1-\widehat{\mathrm{P}}_2}=\sqrt{\frac{\mathrm{p}_1(1-\mathrm{p}_1)}{\mathrm{n}_1}+\frac{\mathrm{p}_2(1-\mathrm{p}_2)}{\mathrm{n}_2}}$

$$z=\frac{\left(\widehat{\mathrm{P}}_1-\widehat{\mathrm{P}}_2\right)-(\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2)}{\delta_{\widehat{\mathrm{P}}_1-\widehat{\mathrm{P}}_2}}$$

مثال (2-09): يوجد نوعين من مبيدات الحشرات A و B تم رش حجرتين متماثلتين الأولى بالنوع A والثانية بالنوع B ، إذا تم اختيار عينتين من الحشرات حجم كل منهما 200 حشرة ووضعت كل عينة في حجرة ما.

- ما احتمال أن يكون الفرق ما بين نسبتي العينتين أكبر من 20 % ؟

$$P\left(Z\geq\frac{0.20-0.10}{\sqrt{0.00125}}\right)$$

$$P(Z\geq 2.82)$$

$$=1-P(Z<2.82)$$

$$=1-F(2.82)=0.0024$$

أي أنه هناك احتمال قدره 0.24% بأن يكون هناك فرق بين نسبتي عينتي الحشرات التي تم القضاء عليها باستخدام نوعي المبيد.

2-1-6 توزيع المعاينة للنسبة بين تباينين (توزيع فيشر)

ليكن لدينا مجتمعان طبيعيان تباينهما δ_1^2 و δ_2^2 نسحب منهما عينتين عشوائيتين على التوالي n_1 و n_2 فإن

$$\boldsymbol{F}=\frac{\dfrac{[n_1S_1^2]\frac{1}{\delta_1^2}}{n-1}}{\left[\dfrac{n_2.S_2^2}{n_2-1}\right]\frac{1}{\delta_2^2}}=\frac{\widehat{S}_1^2/\delta_1^2}{\widehat{S}_2^2/\delta_2^2}\sim F_{n_1-1;\,n_2-1}$$

مثال (2−10): لدينا عينتين حجمهما 8 و 10 مسحوبتان من مجتمعين طبيعيين تباينهما على التوالي 20 و 36 ، ما هو احتمال أن يكون تباين الأولى أكبر من ضعف تباين الثانية ؟

الحل :

لدينا: $n_1 = 8$ ، $\delta_1^2 = 20$ $\qquad$ $n_2 = 10$ ، $\delta_2^2 = 36$

$$P\left(S_1^2 > 2S_2^2\right) = P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\right) > 2$$

$$\boldsymbol{P}\left(\frac{\frac{\left[n_1 S_1^2\right]\frac{1}{\delta_1^2}}{n-1}}{\left[\frac{n_2 . S_2^2}{n_2-1}\right]\frac{1}{\delta_2^2}} > 2.\frac{{}^{8}/_{7.(20)}}{{}^{10}/_{9.(36)}}\right) = \boldsymbol{P}\left(F_{7,9} > 3.7\right)$$

من جدول فيشر القيمة محصورة بين 0.025 و 0.05 ومنه: $P(F_{7,9} > 3.7) = 0.036$

سلسلة تمارين الفصل الثاني:

تمرين 01 :

يخضع أوزان طلبة جامعة ما إلى التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 70 كلغ و انحراف معياري 10 كلغ ، إذا اخترنا عشوائيا عينة من 49 طالب.

- أحسب الوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لمتوسط أوزان الطلبة.
- حدد القانون الاحتمالي لـ $\bar{X}$.
- ما احتمال أن يكون متوسط أوزان الطلبة في العينة محصور بين 68 و 73 ؟
-

تمرين 02 :

لدينا مجتمع يتكون من 900 عنصر وسطه الحسابي 20 وحدة وانحرافه المعياري 12 وحدة.

- أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة في الحالتين التاليتين:

أ- $n=36$

ب- $n=64$

- أحسب احتمال أن يكون $\bar{X}$ محصور بين 18 و 22.

تمرين 03

إذا كان لدينا متوسط الدخل الشهري لأسر بلد ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 40.000 دج و انحراف معياري 10.000 دج

نسحب عينة عشوائية حجمها 20 من هذا المجتمع ما احتمال :

- أن يكون متوسط الدخل الشهري للعينة أقل من 35000 دج ؟
- أن يكون متوسط الدخل الشهري للعينة محصور بين 38000 و 42000 ؟
- أن يكون متوسط الدخل الشهري للعينة أكبر من 38000 دج ؟

تمرين 04:

إذا علمت أن 24 % من المدخنين يفضلون نوع خاصا من السجائر. إذا تم اختيار 400 مدخن أوجد احتمال أن يكون:

- على الأكثر 30% منهم يفضلون هذا النوع من السجائر ؟
- على الأقل 28% منهم يفضلون هذا النوع من السجائر ؟

تمرين 05:

إذا علمت أن متوسط مستويات مصل الكولسترول للأشخاص الذين تتراوح أعمارهم ما بين 25 و34 سنة يقدر بـ199 والانحراف المعياري 49، بينما الأشخاص الذين تتراوح أعمارهم ما بين 20 و24 سنة فإن متوسط الكولسترول يقدر بـ 180 والانحراف المعياري 43.

اختيرت عينتين مستقلتين حجم كل منهما 50شخص من هذين المجتمعين.

- ما احتمال أن يكون الفرق بين متوسط الكولسترول في العينتين أكبر من 25% ؟

تمرين 06 :

إذا علمت أن نسب التسرب المدرسي لدى طلاب المرحلة الثانوية بـ مدينتين هي 25%و15% على التوالي فإذا تم اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين حجم كل منهما 50 أوجد احتمال:

- أن يكون الفرق ما بين نسبتي العينتين أقل من 20 % ؟
- أن يكون الفرق ما بين بسنتي العينتين ما بين 18 % و 25 % ؟

تمرين 07:

تخضع علامات الطلاب في مادة الرياضيات للتوزيع الطبيعي بمعدل 70 وانحراف معياري 20، سحبت عينة عشوائية حجمها 25 طالب.

- أحسب احتمال أن يكون معدل العلامات أكبر من 56 وأقل من 85 ؟
- أحسب احتمال أن يكون تباين العلامات في العينة أكبر من 492.5؟
- أحسب احتمال أن يكون تباين العلامات في العينة محصور بين 260.9 و332.4؟

حل التمرين 01:

لدينا: $\delta = 10$ ، $\mu = 70,$ ، $n = 49\,,$

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu = 70$$

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{49}} = 1.43$$

- القانون الاحتمالي لـ $\bar{X}$:

بما أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه معلوم أي أن: $X \sim N(70, 10^2)$ فإن توزيع المعاينة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ ونكتب: $\bar{X} \sim N(70, 1.43^2)$

$$P(68 \leq \bar{X} \leq 73) = P\left(\frac{68-70}{10/\sqrt{49}} \leq Z \leq \frac{73-70}{10/\sqrt{49}}\right)$$

$$= P(-1.39 \leq Z \leq 2.09)$$

$$= P(Z \leq 2.09) - P(Z \leq -1.39)$$

$$= P(Z \leq 2.09) - [1 - P(Z < 1.39)]$$

$$= \boldsymbol{P(Z \leq 2.09)} + \boldsymbol{P(Z} < 1.39) - \mathbf{1}$$

$$= \mathbf{0.9816 + 0.9177 - 1 = 0.9893}$$

حل التمرين 02:

لدينا: $\delta = 12$, $\mu = 20$, $N = 900$,

- حساب الوسط الحسابي الانحراف المعياري:

***n*=36-**

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu = 20$$

لحساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة نتحقق من النسبة $\frac{n}{N}$

$\frac{n}{N} = \frac{36}{900} = 0.04 < 0.05$ وبالتالي نهمل معامل التصحيح.

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2$$

- ***n=64*** $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu = 20$

$\frac{n}{N} = \frac{64}{900} = 0.07 > 0.05$ وبالتالي لا نهمل معامل معامل التصحيح.

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{12}{\sqrt{64}}\sqrt{\frac{900-64}{900-1}} = 1.44$$

- **n=36**

$$P(18 \leq \bar{X} \leq 22) = P\left(\frac{18-20}{2} \leq Z \leq \frac{22-20}{20}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1)$$

$$= \mathbf{P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)}$$

$$= \mathbf{P(Z \leq 1)} - [1 - P(\mathbf{Z \leq 1})]$$

$$= 2\mathbf{P(Z \leq 1)} - 1 = 2(0.8413) - 1 = \mathbf{0.6826}$$

- **n=64**

$$P(18 \leq \bar{X} \leq 22) = P\left(\frac{18-20}{1.44} \leq Z \leq \frac{22-20}{1.44}\right)$$

$$= P(-1.38 \leq Z \leq 1.38)$$

$$= P(Z \leq 1.38) - P(Z \leq -1.38)$$

$$= P(Z \leq 1.38) - [1 - P(Z \leq 1.38)]$$

$$= 2P(Z \leq 1.38) - 1 = 2(0.9162) - 1 = \mathbf{0.8324}$$

حل التمرين 03:

لدينا: $n = 20\,, \qquad \mu = 40000, \qquad \delta = 10000$

$$P(\overline{X} < 35000) = P\left(Z < \frac{35000 - 40000}{10000/\sqrt{20}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{-5}{2.23}\right) = P(Z < -2.33)$$

$$= \mathbf{1 - P(Z \le 2.33) = 1 - 0.99}$$

$$P(38000 \le \overline{X} \le 42000) = P\left(\frac{38000 - 40000}{2.23} \le Z \le \frac{42000 - 40000}{2.23}\right)$$

$$= P(-0.89 \le Z \le 0.89)$$

$$= \mathbf{2P(Z \le 0.89) - 1 = 2(0.8133) - 1 = 0.6266}$$

$$P(\overline{X} > 38000) = P\left(Z > \frac{38000 - 40000}{2.23}\right)$$

$$= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} > -0.89) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z} < 0.89) = \mathbf{0.8133}$$

حل التمرين 04:

لدينا: $n = 400\,, \qquad p = 0.24, \qquad q = 1 - p = 0.76$

بما أن $n = 400 > 30$ وحسب نظرية النهاية المركزية فإن:

$$\hat{p} \sim N\left(0.24, \sqrt{\frac{0.24.0.76}{400}}\right) \quad \leftarrow \hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$$P(\hat{p} \le 0.30) = P(Z \le \frac{0.30 - 0.24}{0.021}) = p(Z \le 2.85) = 0.998$$

$$P(\hat{p} \ge 0.28) = P(Z \ge \frac{0.28 - 0.24}{0.021}) = p(Z \ge 1{,}90) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.90) = 1 - 0.971 = 0.029$$

حل التمرين 05:

لدينا $n_1 = n_2 = 50,\ \delta_1 = 49,\ \delta_2 = 43\ ,u_1 = 199,\ \mu_2 = 180$

بما أن $n_1 = n_2 = 50 > 30$ وحسب نظرية النهاية المركزية فإن: $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N\left(u_1 - u_2 : \frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}\right)$

$$u_1 - u_2 = 199 - 180 = 19$$

$$\delta^2{}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2} = \frac{(49)^2}{50} + \frac{(43)^2}{50} = 85$$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \sim N(19, 85)$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq 25 = P\left(\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (u_1 - u_2)}{\delta_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \geq \frac{25 - 19}{\sqrt{85}}\right)$$

$$= P(Z \geq 0.65) = 1 - P(Z < 0.65)$$

$$= 1 - F(0.65) = 1 - 742 = 0.258$$

حل التمرين 06:

لدينا: $n_1 = n_2 = 50, \qquad p_1 = 0.25,\ p_2 = 0.15$

بما أن: $n_1 = n_2 = 50 > 30$ وحسب نظرية النهاية المركزية فإن الفرق بين نسبتي العينتين يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط: $u_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = p_1 - p_2 = 0.25 - 0.15 = 0.10$ وانحراف معياري:

$$\delta_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1 - p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1 - p_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.25).(0.75)}{50} + \frac{(0.15).(0.85)}{50}} = \sqrt{0.0063 = 0.079}$$

$$P(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) < 0.20 = P\left(\frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1.q_1.}{n_1} + \frac{p_2.q_2}{n_2}}} < \frac{0.20 - 0.1}{0.079}\right)$$

$$P(Z < 1.26) = 0.896$$

$$P(0.18 \leq \hat{P}_1 - \hat{P}_2 \leq 0.25) = P\left(\frac{0.18 - 0.10}{0.079} \leq \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1.q_1.}{n_1} + \frac{p_2.q_2}{n_2}}} \leq \frac{0.25 - 0.1}{0.079}\right)$$

$$P(1.08 \leq Z \leq 1.90) = P(Z \leq 1.90) - P(Z \leq 1.08)$$

$$0.971 - 0.859 = 0.112$$

حل التمرين 07:

لدينا: $\delta = 20 \qquad \mu = 70, \qquad n = 25\ ,$

$$P\left(56 \leq \overline{X} \leq 85\right) = P\left(\frac{56-70}{20/\sqrt{25}} \leq Z \leq \frac{85-70}{20/\sqrt{25}}\right)$$

$$= P(-3.5 \leq \mathrm{Z} \leq 3.75)$$

$$= P(Z \leq 3.75) - P(Z \leq -3.5)$$

$$= P(Z \leq 3.75) - [1 - P(Z < 3.5)]$$

$$= P(Z \leq 3.75) + P(Z < 3.5) - 1$$

$$= \mathbf{0.99 + 0.998 - 1 = 0.988}$$

- $$P(S^2 > 492.5) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\delta^2} \geq \frac{(492.5)(24)}{400}\right)$$

$$= \mathrm{P}(\mathrm{X}_{24}^2 \geq 29.5) = 0.25$$

ملاحظة: حسب جدول فيشر القيمة 29.5 موجودة بين 31.96 و 28.24 وهي أقرب إلى 28.24 وبالإسقاط نجد 0.25. أي أن احتمال أن يكون تباين العلامات في العينة أكبر من 492.5 هو 25%.

- $$P(260.90 \leq S^2 \leq 332.40) = P\left(\frac{(260.90)(24)}{400} \leq \frac{(n-1)S^2}{\delta^2} \leq \frac{(332.40)(24)}{400}\right)$$

$$P(15.65 \leq X_{24}^2 \leq 19.94) =$$

$$P(X_{24}^2 \leq 19.94) - P(X_{24}^2 \leq 15.65)$$

$$[1 - P(X_{24}^2 \geq 19.94)] - [1 - P(X_{24}^2 \geq 15.65)]$$

$$P(X_{24}^2 \geq 15.65) - P(X_{24}^2 \geq 19.94) =$$

$$0.900 - 0.750 = 0.15$$

أي أن احتمال أن يكون تباين العلامات في العينة محصور بين 260.90 و332.40 هو 15%.

الفصل الثالث: نظرية التقدير

تمهيد:

-مفهوم التقدير

-أنواع التقدير

-خواص المقدر النقطي التقدي بمجال

- **مجال الثقة للوسط**
- **مجال الثقة للنسبة**
- **مجال الثقة للتباين**
- **مجال الثقة للفرق بين متوسطين**
- **مجال الثقة للفرق بين نسبتين**
- **مجال الثقة للفرق بين تباينين**
- **مجموعة تمارين الفصل الثالث.**

تمهيد:

تعد نظرية التقدير من أهم نظريات الإحصاء الاستنتاجي، حيث تهتم بتقديم معالم المجتمع المجهولة عن طريق اختيار عينة عشوائية من هذا المجتمع والحصول على دالة لقيم العينة، هذه الدالة تسمى بالمقدر، يستخدم التقدير في العديد من المجالات اليومية في حياتنا كأن تقدر الأم مصروفها الشهري، يقدر العامل الوقت اللازم لانجاز عمله ....الخ.

3-1 مفهوم التقدير

غالبا ما يتم تقدير أحد معالم المجتمع باستخدام إحصائيات العينة بسبب عوامل عديدة منها: التكلفة، الوقت وعوامل أخرى، لذلك يمكن تعريف التقدير بأنه ذلك الأسلوب الذي يعتمد على حسابات بعض الإحصاءات من بيانات العينة التي تعطي قيم تقريبية للمعلمات المناظرة لها في المجتمع الإحصائي المختارة منه.

3-2 أنواع التقدير: ينقسم التقدير إلى قسمين: التقدير النقطي والتقدير بمجال.

3-2-1التقدير النقطي[1]

نقول بأن المقدر مقدر نقطي (بقيمة واحدة) لمعلمة المجتمع الإحصائي إذا أعطى قيمة عددية واحدة كتقدير لتلك المعلمة فمثلا لتقدير متوسط المجتمع μ سوف نستخدم متوسط، ويمكن الحصول على التقدير النقطي للمعلمة المجهولة بإستخدام عدة طرق منها، طريقة المعقولية العظمى، طريقة العزوم، طريقة المربعات الصغرى، طريقة بايـز .....إلخ.

3-2-1-1 خواص المقدر النقطي:

نقول بأن المقدر جيد إذا توفرت فيه الخصائص التالية :

أ- عدم التحيز unbiasedness:

يقصد بالتحيز ذلك الفرق الموجود بين مقدر معين وتوقعه الرياضي، إذا كان هذا الفرق يختلف عن الصفر نقول عن ذلك المقدر بأنه متحيزا أما إذا كان الفرق معدوما فإننا نقول بأن المقدر غير متحيز أو بمعنى آخر إذا كانت القيمة المتوقعة له تساوي معلمة المجتمع الإحصائي المطلوب تقديرها، رياضيا نقول عن المقدر $\hat{o}$ أنه مقدر غير متحيز للمعلمة المجهولة o إذا كان:

[1] عبد السلام العماري ، على حسين العجيلي ، الإحصاء والاحتمالات النظريات والتطبيق، منشوراتELGA جامعة الفاتح، ص 449، 2000.

$$E(\hat{o}) = O$$

$$E(\bar{x}) = u$$

$$E(\hat{P}) = P$$

مثال:

$$E\ (\bar{X}) = E\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}[E(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)]$$

$$= \frac{1}{n}\left[E\left(x_1 + x_{2+\cdots+x_n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}[Ex_1 + Ex_2 + \cdots Ex_n]$$

$$= \frac{1}{n}[u_1 + u_2 + \cdots + u_n]$$

$$= \frac{1}{n}[nu_i] = \mu$$

نقول عن الإحصائية S^2 تباين العينة في حالة المعاينة بالإرجاع أنها مقدر غير منحاز ل δ^2 لأن:

$$E(S^2) = \frac{n}{n-1}\delta^2 \neq \delta^2$$

ب : الكفاءة Efficacité:

إذا كان المقدرين $\hat{o}_1$ ، $\hat{o}_2$ غير متحيزين لنفس المعلمة o، نقول أن $\hat{o}_1$ أكفأ من $\hat{o}_2$ إذا كان :

$$v(\hat{o}_1) < v(\hat{o}_2)$$

أي أن المقدر الأكثر كفاءة هو الذي له أصغر تباين.

3-2-2 التقدير بمجال

تعريف: مجال الثقة لمعلمة o بمستوى ثقة $(1-\alpha) \in]0.1[$ هو مجال باحتمال $(1-\alpha)$ يتضمن القيمة الحقيقية ويمكن التعبير عنه بالعلاقة التالية:

$$\text{p}(T_1 \leq T_2) = P(\hat{o} - k \leq o \leq \hat{o} + k) = 1 - \alpha$$

T_1: الحد الأدنى لمجال الثقة،

T_2: الحد الأعلى لمجال الثقة،

$(1-\alpha)$: معامل الثقة (مستوى الثقة)،

k: قيمة تؤخذ بعين الاعتبار.

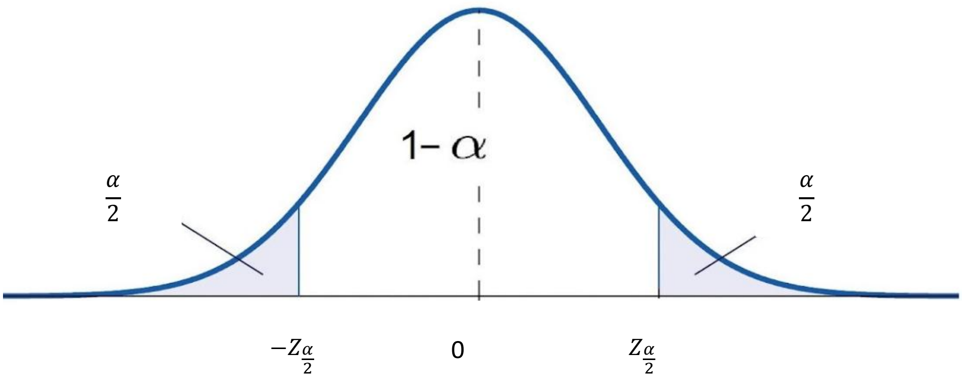
3-2-2-1 مجال الثقة للوسط

أ- مجال الثقة للوسط باستخدام التوزيع الطبيعي

يستخدم التوزيع الطبيعي لتقدير متوسط المجتمع u المجهول إذا كان المجتمع المسحوب منه طبيعي وتباينه معلوم أو في حالة كون n كبيرة $(n \geq 30)$ ، وذالك حسب نظرية النهاية المركزية ونكتب:

$$\bar{X} \sim \text{N}\left(\text{u}: \frac{\delta^2}{\text{n}}\right) \qquad \text{Z}=\frac{\bar{x}-u}{\delta_{\bar{x}}} \sim N(0:1)$$

ويمكن تمثيل التوزيع الطبيعي المعياري بيانيا كما في الشكل:



حسب الشكل أعلاه فإن:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$p\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-U_{\bar{X}}}{\delta_{\bar{X}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

وبإجراء بعض التعديلات نجد:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\delta}{\sqrt{n}} \leq U \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

أو :

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\delta}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq U \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\delta}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال(3−01): أخذت عينة عشوائية حجمها 05 مفردات بمتوسط 7 من مجتمع موزع طبيعيا انحرافه المعياري 2

– ما هو تقدير متوسط المجتمع u عند مستوى ثقة 90 % ؟

الحل:

لدينا: $\delta = 2, n = 5, \overline{X} = 7, 1-\alpha = 0.90$

بما أن δ معلومة فإن تقدير متوسط المجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي وفق العلاقة:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\delta}{\sqrt{n}} \leq U \leq \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

$$7 - 1.64(\frac{2}{\sqrt{5}} \leq U \leq 7 + 1.64.\frac{2}{\sqrt{5}})$$

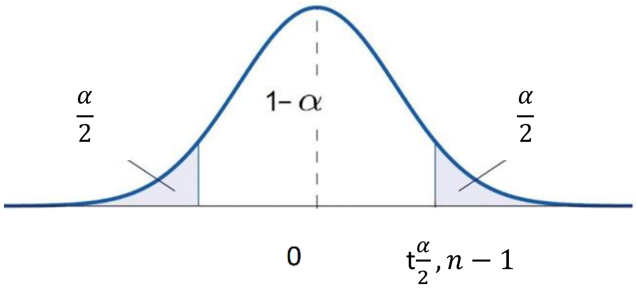
$$7 - 1.46 \leq U \leq 7 + 1.46$$

$$5.54 \leq U \leq 8.46$$

أي أن تقدير متوسط المجتمع محصور بين 5.54 و 8.46 عند مستوى ثقة 90 % .

ب – مجال الثقة للوسط باستخدام توزيع student

إذا كان توزيع المجتمع طبيعيا وتباين المجتمع (δ^2) وحجم العينة صغير (n<30) فإن مجال الثقة للمتوسط u يتبع توزيع student و أن توزيع المعاينة للإحصاءة هو: $T=\frac{\bar{x}-u}{s\sqrt{n}}$ بدرجة حرية $(n-1)$ من الشكل أدناه فإن:



توزيع ستيودنت

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}.n-1} \leq T \leq t_{\frac{\alpha}{2}.n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}.n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}} \leq u \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}.n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

ومنه فإن:

$$\boldsymbol{\bar{X}-_{\frac{\alpha}{2}.n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}} \leq u \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}.n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

مثال (3−02): أخذت عينة عشوائية من 25 مفردة بمتوسط 80 وانحراف معياري 30 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي، كون مجال الثقة 90 % لمتوسط المجتمع.

الحل:

لدينا:. $s = 30, \quad n = 25, \quad \bar{x} = 80$

$$1-\alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 10\ \%$$

بما أن المجتمع طبيعي وتباينه مجهول و $n = 25< 30$ فإن مجال الثقة لوسط المجتمع u يتبع توزيع student وفق العلاقة التالية:

$$\bar{X}-t_{\frac{\alpha}{2}.n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}} \leq u \leq \bar{X}+t_{\frac{\alpha}{2}.n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$T_{\frac{\alpha}{2};n-1} = T_{0.05;24} = 1.7109$$

ومنه:

$$80 - 1.7109.\frac{30}{\sqrt{25}} \leq u \leq 80 + 1.7109.\frac{30}{\sqrt{25}}$$

$$69.73 \leq u \leq 90.27$$

أي أن وسط المجتمع محصور بين القيمتين 69.73 و 90.27 عند مستوى ثقة 90%.

3-2-2-2 مجال الثقة للنسبة

كما هو معلوم فإن التوزيع الاحتمالي للنسبة هو التوزيع الثنائي، إلا أن كثرة الحسابات وتعقدها عند فترة الثقة لنسبة المجتمع غير المعروف جعل العديد من المراجع تلجأ إلى استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي، وهذا عندما تكون حجم العينات كبيرة وعندما لا تكون نسبة النجاح قريبة جدا من الصفر أو الواحد[2] ، فإن توزيع المعاينة للنسبة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط:

$$u_{\hat{p}} = p$$

وتباين $$\delta^2{}_{\hat{p}} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$Z=\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \sim N(0 \cdot 1)$$

[2] شبيزل ، شيلز ، سرينيفيسان ، ترجمة محمد على الناصر ، مصطفى جمال مصطفى ، الاحتمالات والإحصاء ، الدار الدولية للإشهارات الثقافية ، مصر ،2004 ، ص 91.

وعليه فإن فترة الثقة $(1-\alpha)$ حول P :

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\hat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \leq P \leq \hat{P}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

وبما أن p مجهولة يتم تعويضها بمقدرها النقطي $\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$ فيصبح مجال الثقة من الشكل التالي :

$$\hat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq P \leq \hat{P}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

أو :

$$\hat{P}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq P \leq \hat{P}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}.\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال(3−03): إذا علمت أن 28 شخص من بين 50 شخص تم اختيارهم بطريقة عشوائية يفضلون نوع معين من السجائر، أوجد مجال الثقة 90 % حول نسبة الأشخاص الذين يفضلون هذا النوع من السجائر.

الحل:

لدينا: $n = 50, x = 28$

$$\hat{P} = \frac{x}{n}=\frac{28}{50}=0.56$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.64 \qquad \leftarrow (1-\alpha) = 0.9 \leftarrow \alpha = 10\%$$

$$0.56-1.64\sqrt{\frac{0.56(0.44)}{50}} \leq P \leq 0.56+1.64\sqrt{\frac{0.56(0.44)}{50}}$$

$$0.56-0.115 \leq P \leq 0.56+0.115$$

$$0.445 \leq P \leq 0.675$$

وبالتالي فإن نسبة الأشخاص الذين يفضلون هذا النوع من السجائر محصور بين 0.445 و 0.675 عند مستوى معنوية 90 % .

3-2-2-3 مجال الثقة للتباين

في بعض الأحيان تتطلب الدراسة محل البحث تقدير تباين المجتمع δ^2 داخل مجال ما، ولأجل ذالك وجب علينا معرفة توزيع المعاينة لتباين العينة S^2 ولإجراء هذا التقدير يجب أن يكون توزيع المجتمع طبيعي.

إذا كانت $X_1 . x_2 \ldots . x_n$ تشكل عينة عشوائية من مجتمع طبيعي بمتوسط u وتباين δ^2 فإن توزيع المعاينة للإحصاءة كما أشرنا إليه سابقا يكون وفق توزيع كاي مربع حسب الصيغة الموالية:

$$X^2 = \frac{(n-1)}{\delta^2} . S^2$$

يمكن إيجاد فترة الثقة لتقدير δ^2 إنطلاقا من منحنى كـاي مربع المبين كما يلي:

$$P\left(X^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq X^2 \leq x^2{}_{\frac{\alpha}{2}.n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(X^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{(n-1).S^2}{\delta^2} \leq x^2{}_{\frac{\alpha}{2}.n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1).S^2}{X^2{}_{\frac{\alpha}{2}.n-1}} \leq \delta^2 \leq \frac{(n-1).S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$$

وعليه فإن مجال الثقة للتباين يعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\frac{(n-1).S^2}{X^2{}_{\frac{\alpha}{2}.n-1}} \leq \delta^2 \leq \frac{(n-1).S^2}{X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}.n-1}}}$$

مثال (3-04): سحبت عينة عشوائية حجمها δ وتباينها 11.8 من مجتمع موزع طبيعيا، أوجد فترة الثقة لتباين المجتمع عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

$S^2 = 11.8$. α =5%.n=6 .

بما أن المجتمع موزع طبيعيا فإن مجال الثقة 95% لتباين المجتمع يعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{(n-1).S^2}{X^2{}_{\frac{\alpha}{2}.n-1}} \leq \delta^2 \leq \frac{(n-1).S^2}{X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}.n-1}}$$

$$X^2{}_{\frac{\alpha}{2}.n-1} = X^2{}_{0.25،5} = 12.83$$

$$X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}:n-1} = X^2{}_{0.975،5} = 0.83$$

ومنه :

$$\frac{(6-1).11.8}{12.83} \leq \delta^2 \leq \frac{(6-1).11.8}{0.83}$$

$$4.60 \leq \delta^2 \leq 71.08$$

أي أن تباين المجتمع محصور بين 4.60 و71.08 عند مستوى ثقة 5% .

3-2-2-4 مجال الثقة للفرق بين متوسطين:

أ- مجال الثقة للفرق بين متوسطين في حالة عينتين مستقلتين

1-حالة δ_1^2 و $\delta^2{}_2$ معلومان

يعطى مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين تباينهما معلومان أو حجم العينتين المسحوبتين منهما كبير $(n \geq 30)$ بالعلاقة التالية :

$$\mathbf{Z} = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\delta^2}{n_1}+\frac{\delta^2}{n_2}}} .$$

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta^2}{n_1}+\frac{\delta^2}{n_2}}\le u_1-u_2\le(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\delta^2}{n_1}+\frac{\delta^2}{n_2}}$$

مثال (3−05): إذا تم اختيار عينتين عشوائيتين من تلاميذ الطور الأول والثاني حجمهما 22 ، 25 على التوالي فكان متوسط الأطوال يساوي 119.38 سم ، 126 سم على التوالي مع العلم أن الانحراف المعياري لأطوال مجتمعي تلاميذ الطور الأول والثاني يساوي 4.5 سم و 5.13 سم على التوالي.

إذا علمت أن المجتمعين طبيعيين، أوجد مجال الثقة 90% للفرق بين متوسطي أطوال مجتمعي التلاميذ للطورين الأول والثاني ابتدائي .

الحل:

لدينا : $\delta_1=4.5$ ، $\bar{x}_1=119.38$ ، $n_1=22$ ، $\delta_2=5.13$ ،

$\bar{x}_2=126$ ، $n_2=25$ ، $(1-\alpha)=0.90$

بما أن العينتين مستقلتين والمجتمعين طبيعيين وتبايناهما معلومان فإن مجال الثقة للفرق بين متوسطي أطوال مجتمعي تلاميذ الطورين الأول والثاني عند مستوى ثقة 90% يعطى بالعلاقة التالية.

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{{\delta_1}^2}{n_1}+\frac{{\delta_2}^2}{n_2}}\le u_1-u_2\le(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\delta_1}^2}{n_1}+\frac{{\delta_2}^2}{n_2}}$$

$$(119.38-126)-1.64.\sqrt{\frac{(4.5)^2}{22}+\frac{(5.13)^2}{25}}\le u_1-u_2\le(119.38-126)+1.64\sqrt{\frac{(4.5)^2}{22}+\frac{(5.13)^2}{25}}$$

$$-8.92\le u_1-u_2\le-4.32$$

أي أن الفرق بين متوسطي أطوال مجتمعي الطورين الأول والثاني ابتدائي محصورين بين −8.92 و −4.32 عند مستوى ثقة 90% .

ملاحظة: الإشارة السالبة تدل على أن أطوال الطور الثاني أطول من أطوال الطور الأول.

2 – حالة δ_1^2 , $\delta^2{}_2$ مجهولان لكن غير متساويان و n_1 و n_2 كبيرتين

إذا كانت العينتين المسحوبتان مستقلتان وحجمهما كبير $n_1 \geq 30$ و $n_2 \geq 30$ من مجتمعين تبايناهما مجهولان لكن غير متساويان فإن مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين يعطى بالعلاقة التالية :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{{\delta_1}^2}{n_1} + \frac{{\delta_2}^2}{n_2}} \leq u_1 - u_2 \leq (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{{\delta_1}^2}{n_1} + \frac{{\delta_2}^2}{n_2}}$$

مثال (3−06): تم اختيار عينتين مختلفتين من أحد المصانع من خطي إنتاج مختلفين لعينتين عشوائيتين فكانت نتائج الدراسة كما يلي:

$$n_1 = 32 \quad ، \quad \bar{x}_1 = 178 \quad ، \quad {\delta_1}^2 = 318$$

$$n_2 = 34 \quad ، \quad \bar{x}_2 = 184 \quad ، \quad {\delta_2}^2 = 450$$

–كون مجالا للثقة 95 % للفرق بين متوسطي المجتمعين علما أن المجتمعين مجهولان :

الحل:

بما أن العينتين مستقلتين و $n_1 = 32 > 30$ و $n_2 = 34 > 30$ و ${\delta_1}^2$ و ${\delta_2}^2$ مجهولين فإن مجال الثقة 95% للفرق بين متوسطي المجتمعين هو:

$$(178 - 184) - 1.96.\sqrt{\frac{318}{32} + \frac{450}{34}} \leq u_1 - u_2 \leq (178 - 184) + 1.96\sqrt{\frac{318}{32} + \frac{450}{34}}$$

$$-6 - (9.43) \leq u_1 - u_2 \leq -6 + (9.43)$$

$$-15.43 \leq u_1 - u_2 \leq 3.43$$

أي أن الفرق بين متوسطي المجتمعين محصور بين 15.43− و 3.43 عند مجال ثقة 95 %.

3 – حالة ${\delta_1}^2$ و ${\delta_2}^2$ مجهولان لكن متساويان:

عندما يكون المجتمعان طبيعيان وتبايناهما مجهولان لكن متساويان والعينتين المسحوبتين منهما مستقلتين وإحداهما أو الاثنتين صغيرتين (أقل من 30) فإن الفرق بين متوسطي المجتمعين يعطى بالعلاقة التالية :

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - T_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}.\mathrm{S_c}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le u_1 - u_2 \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + T_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}.\mathrm{S_c}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

حيث $\mathrm{S_c}$ يمثل التباين المشترك ويحسب بالصيغة التالية:

$$\mathrm{S_c} = \sqrt{\frac{(n_1-1).s_1{}^2 + (n_2-1).s_2{}^2}{n_1+n_2-2}}$$

مثال(3−07): نفرض أنه تم اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين طبيعيين مجهولي التباين ولكن تبايناهما متساويان فكانت النتائج :

$$n_1 = 4 \text{ ،} \quad \bar{x}_1 = 0.22 \quad \text{ ،} \quad s_1{}^2 = 0.001$$

$$n_2 = 5 \text{ ،} \quad \bar{x}_2 = 0.17 \quad \text{ ،} \quad s_2{}^2 = 0.002$$

أوجد مجال الثقة 95% للفرق بين متوسطي المجتمعين $(u_1 - u_2)$.

الحل:

بما أن العينتين مستقلتين والمجتمعين طبيعيين وتبايناهما مجهولان لكن متساويان و $n_2 = 5 < 30$ و $n_1 = 4 < 30$ فإن مجال الثقة 95% للفرق بين متوسطي المجتمعين يعطى بالصيغة التالية:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - T_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}.\mathrm{S_c}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le u_1 - u_2 \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + T_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2}.\mathrm{S_c}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

حساب $\mathrm{S_c}$:

$$\mathrm{S_c} = \sqrt{\frac{(n_1-1).s_1{}^2 + (n_2-1).s_2{}^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(4-1).0.001 + (5-1).0.02}{4+5-2}}$$

$$\sqrt{0.0016} = 0.04$$

من جدول *Student* :

$$T_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} = T_{0.025;7} = 2.3646$$

ومنه:

$$(0.22-0.17)-2.3646.(0.04)\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2}{5}} \leq u_1-u_2 \leq (0.22-0.17)+2.3646.(0.04)\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{2}{5}}$$

$$-0.01 \leq u_1-u_2 \leq 0.11$$

نلاحظ أن الفترة تحتوي على الصفر، وعليه لا يوجد دليل واضح على وجود فرق بين متوسطي المجتمعين .

ب – مجال الثقة للفرق بين متوسطين في حالة عينتين غير مستقلتين

لنفترض أنه لدينا : $(X_1.Y_1)$ ، $(X_2.Y_2)$ ،........... $(X_n.Y_n)$

نرمز للعينة العشوائية من المفردات المزدوجة $(X_i.Y_i)$ والتي ترمز لقياسين تم أخذهما على نفس وحدة المعاينة، نرمز في هذه الحالة للفرق بين كل زوج من مفردات العينة بـ : $D_i = (X_i - Y_i)$

حيث: (i=1+2+.........n) ومنه فإن مجال الثقة للفرق بين متوسطي $U_D = (U_1 - U_2)$

متغيرين لنفس المجتمع وذلك انطلاقا من عينتين غير مستقلتين مسحوبتين من هذا المجتمع عندما يكون الفرق $D = (X_1 - Y_1)$ في المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي هو :

$$\bar{d} - t_{\frac{\alpha}{2}.n-1}.\frac{S_d}{\sqrt{n}} \leq U_D \leq \bar{d} + t_{\frac{\alpha}{2}.n-1}.\frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

حيث:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}} \quad \text{،} \quad \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

مثال (3−08): تم قياس نبضات القلب لعينة مكونة من 6 رياضيين فكانت النتائج كما يلي :

قبل التمرين	72	70	60	65	70	67
بعد التمرين	99	90	80	93	95	90

المطلوب: إيجاد مجال الثقة 90 % للفرق بين متوسطي نبضات القلب بفرض أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي.

الحل:

بما أن العينتين غير مستقلتين فإن مجال الثقة للفرق بين متوسطي نبضات القلب للرياضيين يعطى بالعلاقة التالية :

$$\bar{\mathrm{d}} - t_{\frac{\alpha}{2}.\mathrm{n}-1}.\frac{S_{\mathrm{d}}}{\sqrt{\mathrm{n}}} \leq U_{\mathrm{D}} \leq \bar{\mathrm{d}} + t_{\frac{\alpha}{2}.\mathrm{n}-1}.\frac{S_{\mathrm{d}}}{\sqrt{\mathrm{n}}}$$

قبل التمرين	72	70	60	65	70	67
بعد التمرين	99	90	80	93	95	90
d_{i}	27	20	20	28	25	23

$$\bar{\mathrm{d}} = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_{\mathrm{i}}}{n} = \frac{27+20+20+28+25+23}{6} = 23.83$$

$$S_{\mathrm{d}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}(d_{\mathrm{i}}-\mathrm{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(27-23.83)^2+(20-23.83)^2+(20-23.83)^2 \ldots + (23-23.83)^2}{5}}$$

$$S_{\mathrm{d}} = 3.43$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}.\mathrm{n}-1} = t_{0.05.5} = 2.015$$

ومنه بالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على:

$$23.83 - 2.015.\frac{3.43}{\sqrt{6}} \leq U_{\mathrm{D}} \leq 23.83 + 2.015.\frac{3.43}{\sqrt{6}}$$

$$21.09 \leq U_{\mathrm{D}} \leq 26.6$$

5-2-2-3 مجال الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين: $(P_1 - P_2)$

إذا أخذت عينتين عشوائيتين للمتغيرين المستقلين X_1, X_2 وكان حجمهما n_1, n_2 على التوالي وكان y_1 عدد مرات النجاح في العينة الأولى و y_2 عدد مرات النجاح في العينة الثانية فإن تقديري $P_1 . P_2$ سيكون :

$$\widehat{P_2} = \frac{y_2}{n_2} \text{ ، } \quad \widehat{P_1} = \frac{y_1}{n_1}$$

- إذا كانت n_1, n_2 كبيرتين $n_1 \geq 30$ ، $n_2 \geq 30$ وبالاعتماد على نظرية النهاية المركزية فإن:

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \sim \mathrm{N}\left(P_1 - P_2 . \frac{P_1 . q_1}{n_1} + \frac{P_2 . q_2}{n_2}\right)$$

$$\mathrm{Z} = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 . q_1}{n_1} + \frac{P_2 . q_2}{n_2}}} \sim N(0،1)$$

وبتطبيق العلاقة الاحتمالية:

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \mathrm{Z} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1 . q_1}{n_1} + \frac{P_2 . q_2}{n_2}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1 . q_1}{n_1} + \frac{P_2 . q_2}{n_2}} \leq P_1 - P_2 \leq (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1 . q_1}{n_1} + \frac{P_2 . q_2}{n_2}}$$

ومنه يكون مجال الثقة حول $\mathrm{P}_1 - P_2$ بمستوي ثقة $1 - \alpha$ من الشكل:

$$\left[(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1 . q_1}{n_1} + \frac{P_2 . q_2}{n_2}} \;;\; (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1 . q_1}{n_1} + \frac{P_2 . q_2}{n_2}}\right]$$

مثال (8-09): أخذت عينتين من مرضى مصابين بمرض معين حجمهما على التوالي 42، 38، طبق عليهما دواءين حيث شفي 18 مريض من العينة الأولى و 15 مريض من العينة الثانية.

المطلوب: أوجد مجال الثقة 99 % للفرق بين نسبتي المرضى اللذين تم شفاؤهم من هذا المرض ؟

الحل:

لدينا: $\hat{P}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{18}{42} = 0.428$

$$\hat{P}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{15}{38} = 0.394$$

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1.q_1}{n_1} + \frac{P_2.q_2}{n_2}} \leq P_1 - P_2 \leq (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1.q_1}{n_1} + \frac{P_2.q_2}{n_2}}$$

$$0.034 - 2.58\sqrt{\frac{0.43(.0.57)}{42} + \frac{0.39(.0.61)}{38}} \leq P_1 - P_2 \leq 0.034 + 2.58\sqrt{\frac{0.43(.0.57)}{42} + \frac{0.39(.0.61)}{38}}$$

$$-0.246 \leq P_1 - P_2 \leq 0.314$$

بما أن الطرفين مختلفين في الإشارة فهذا معناه أن المجال يتضمن الصفر وبالتالي يمكن القول أنه لا يوجد فرق بين الدواءين فيما يخص الشفاء.

3-2-2-6 مجال الثقة للنسبة بين تباينين

في بعض الحالات يكون المطلوب منا مقارنة تباين مجتمعين ونكون أمام دراسة النسبة بين تبايني هاذين المجتمعين فإذا كانت هذه النسبة تساوي الواحد فهذا يعني أن التباينين متساويين ولكن غالبا ما يكون تبايني المجتمعين مجهولان، وبالتالي أي مقارنة بينهما سوف تكون مبنية على أساس تباين العينتين، ويمكن استخلاص فترة الثقة لنسبة تبايني مجتمعين انطلاقا من شكل توزيع فيشر.

-إذا كان ${\delta^2}_1$ و ${\delta^2}_2$ مجهولان وكانت ${S^2}_1$ ، ${S^2}_2$ مسحوبتان من عينتين مستقلتين ولدينا مما سبق:

$F = \frac{{S^2}_1/{\delta^2}_1}{{S^2}_2/{\delta^2}_2}$ بدرجات حرية: $(n_1 - 1)$ ، $(n_2 - 1)$.

- لإيجاد فترة الثقة للنسبة بين تبايني مجتمعين انطلاقا من شكل توزيع فيشر فإن:

$$P\left[f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1} \leq F \leq f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1} \leq \frac{S^2{}_1/\delta^2{}_1}{S^2{}_2/\delta^2{}_2} \leq f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}\right]$$

$$P\left[\frac{S^2{}_1/\delta^2{}_1}{f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}} \leq \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \leq \frac{S^2{}_1/\delta^2{}_1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}}\right]$$

وعليه فإن فترة النسبة $1-\alpha$ بين التباينين يعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{S^2{}_1/\delta^2{}_1}{f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}} \leq \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \leq \frac{S^2{}_1/\delta^2{}_1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}}$$

مثال (3−10): تم أخد عينتين متساويتين من المرضى حجمهما 32 مريض مصاب بنوع معين من المرض حيث تم علاج المجموعة الأولى بدواء معين والمجموعة الثانية بدواء آخر فكانت نتائج تحليل فعالية الدواءين كما يلي:

$$S^2{}_2=15 \text{ ، } S^2{}_1 = 8$$

- أوجد فترة الثقة 90% للنسبة بين التباينين:

الحل:

لدينا: $n_1=n_2 = 16$ ، $S^2{}_2=15$ ، $S^2{}_1 = 8$

إذن فترة الثقة 90% للنسبة بين التباينين تعطى بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\frac{S^2{}_1/\delta^2{}_2}{f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}} \leq \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \leq \frac{S^2{}_1/\delta^2{}_2}{f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}}}$$

$$f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1} = f_{0.05.15.15} = 2.40$$

$$f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1} = \frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}.n_2-1.n_1-1}} = \frac{1}{f_{0.05.15.15}} = \frac{1}{2.40} = 0.4167$$

$$\frac{8/15}{2.40} \leq \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \leq \frac{8/\delta^2{}_1}{0.4167}$$

$$\rightarrow 0.222 \leq \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \leq 1.2799$$

سلسلة تمارين الفصل الثالث:

تمرين 01:

بافتراض أن عمر المصابيح الكهربائية التي ينتجها مصنع معين يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 250 ساعة اختير من إنتاجه عينة عشوائية حجمها 100 مصباح، فكان متوسط عمر المصباح في العينة 1200 ساعة، قدر بمستوى ثقة 95% متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع كله.

تمرين 02:

يرغب صاحب مصنع الصناعية في تقدير قوة انكسار الألياف، صممت تجربة لقياس قوة الانكسار بالرطل لعدد 16 من الألياف، اختيرت عينة عشوائية من العملية الإنتاجية فكانت النتائج كما يلي :

$20.8 - 20.6 - 21 - 20.9 - 19.9 - 20.2 - 19.8 - 19.6 - 20.9 - 21.1 - 20.4 - 20.6 - 19.7 - 19.6 - 20.32 - 20.7$.

بافتراض أن قوة انكسار الألياف تتبع التوزيع الطبيعي ، حدد مجال الثقة 90% لمتوسط قوة انكسار الألياف .

تمرين 03:

أجريت دراسة مدى صلاحية مياه الشرب بمنطقة معينة حيث اختيرت 80عينة عشوائية فوجد من بينها 20 عينة بها طفيليات، أوجد 95% فترة الثقة لتقدير احتمال وجود طفيليات.

تمرين 04:

أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي فكان التباين $S^2{}_1 = 18$ ،أخذت عينة أخرى حجمها 11 من مجتمع طبيعي فكان التباين $S^2{}_2 = 12$.

إذا كان المجتمعين طبيعيين ومستقلين، أوجد فترة الثقة 90% للنسبة بين تبايني المجتمعين.

تمرين 05:

سحبنا عينة عشوائية حجمها 100 شخص من مدينة سكيكدة فتبين أن 40 % منهم يفضلون البرامج الوطنية ، ثم سحبنا عينة عشوائية حجمها 200 شخص من مدينة عنابة فتبين أن 30% منهم يفضلون البرامج الوطنية

- قدر بواسطة مجال الثقة 95% الفرق بين نسبتي الأشخاص الدين يفضلون البرامج الوطنية في هاتين المدينتين.

تمرين 06:

سحبنا عينة عشوائية حجمها 10 مصابيح كهربائية من نوع معين فكان متوسط عمر المصابيح في العينة 4000 ساعة بانحراف معياري 200 ساعة ثم سحبنا عينة عشوائية أخرى حجمها 8 مصابيح من نوع أخر فكان متوسط عمر المصابيح 4600 ساعة بانحراف معياري 250 ساعة ، مع العلم أن عمر المصابيح يتبع التوزيع الطبيعي، قدر بواسطة مجال الثقة 95 % الفرق بين متوسطي العمر لهذين النوعين من المصابيح بفرض أن تباين المجتمعين مجهولين ومتساويين .

تمرين 07:

إذا كانت إدارة إحدى المؤسسات أمام مشكلة اتخاذ القرار بشأن شراء نوعين من الآلات التي تستخدم لتعبئة منتجها في أكياس خاصة وأن هاتين الآلتين متشابهتين الأمر الذي أدى بالإدارة إلى اتخاذ قرار شراء الآلة التي لها أقل تباين في الكمية المعبأة في الأكياس فلجأت إلى اختيار عينة من إنتاج كل آلة حسب الجدول التالي:

الآلة A	51	50	50.9	51	49	51	52	51.5	50
الآلة B	49	49.5	50	48.5	52	48.5	50	49	

- أوجد مجال الثقة 95 % لـ $\frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2}$ علما أن وزن الأكياس المعبئة يخضع للتوزيع الطبيعي.

حل التمرين 01:

لدينا: $\text{n} = 100$ ، $\delta = 250$ ، $\bar{\text{x}} = 1200$ ، $(1-\alpha) = 0.95$

تقدير بمستوى ثقة 95 % متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع كله.

- بما أن $n = 100 > 30$ وحسب نظرية النهاية المركزية فإن تقدير المتوسط يخضع للتوزيع الطبيعي وفق العلاقة التالية:

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\delta}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

$$1200 - 1.96.\frac{250}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 1200 + 1.96.\frac{250}{\sqrt{100}}$$

$$1200 - 49 \leq \mu \leq 1200 + 49$$

$$1151 \leq \mu \leq 1249$$

ومنه فإن مجال الثقة 95% لمتوسطي عمر المصباح من إنتاج المصنع كله محصور بين 1151 و 1249 عند مستوى ثقة 95% .

<u>حل التمرين 02:</u>

لدينا: $(1 - \alpha) = 0.90$ ، $n = 16$

بما أن المجتمع طبيعي و تباينه مجهول و $n < 30$ فإن مجال الثقة لمتوسط قوة انكسار الألياف يتبع توزيع *student* وفق الصيغة:

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}.\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$\bar{x}$ و S مجهولان نقوم بحسابهما :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{16} x_i}{n} = \frac{20.8 + 20.6 + \cdots + 20.7}{16} = \frac{326}{16} = 20.38$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(20.8 - 20.38)^2 + (20.6 - 20.38)^2 + \cdots + (20.7 - 20.38)^2}{15}}$$

$$S = 0.52$$

ومنه:

$$20.38 - 1.7531.\frac{0.52}{\sqrt{16}} \leq \mu \leq 20.38 + 1.7531.\frac{0.52}{\sqrt{16}}$$

$$20.38 - 0.23 \leq \mu \leq 20.38 + 0.23$$

$$20.15 \leq \mu \leq 20.61$$

أي أن متوسط قوة انكسار الألياف كلها محصورة بين 20.15 و 20.61 عند مستوى ثقة 90%.

حل التمرين 03:

لدينا : $n = 80 > 30$ وحسب نظرية النهاية المركزية فإن فترة الثقة لتقدير إحتمال وجود طفيليات يخضع للتوزيع الطبيعي.

$$\hat{P}_1 = \frac{n_a}{n} = \frac{20}{80} 0.2$$

وعليه فإن:

$$\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq P \leq \hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

$$0.25 - 1.96\sqrt{\frac{0.25(0.75)}{80}} \leq P \leq 0.25 + 1.96\sqrt{\frac{0.25(0.75)}{80}}$$

$$0.25 - 0.095 \leq P \leq 0.25 + 0.095$$

$$0.155\sqrt{\frac{0.25(0.75)}{80}} \leq P \leq 0.345$$

وعليه فإن نسبة وجود طفيليات عند مستوى ثقة 95 % محصور بين 0.155 و 0.345 .

حل التمرين 04:

$$(1-\alpha) = 0.90$$

بما أن المجتمعين طبيعيين فإن تقدير النسبة بين تباينين يعطى حسب علاقة فيشر حسب الصيغة التالية:

$$\frac{S^2{}_1/\delta^2{}_1}{f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}} \le \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \le \frac{S^2{}_1/\delta^2{}_1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}}$$

$$f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1} = f_{0.05.8.10} = 3.07$$

$$f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1} = f_{0.95.8.10} = \frac{1}{f_{0.05.10.8}} = \frac{1}{3.35} = 0.298$$

$$\frac{18/12}{3.07} \le \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \le \frac{18/12}{0.298}$$

$$0.488 \le \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \le 5.02$$

أي أن فترة الثقة للنسبة $\frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2}$ محصورة بين 0.488 و 5.02 عند مستوى معنوية 10%.

حل التمرين 05 :

لدينا : $n_1 = 100$ ، $n_2 = 200$، $\hat{P}_1 = 0.40$، $\hat{P}_2 = 0.30$ ، $(1-\alpha) = 0.95$

بما أن n_1 و n_2 كبيرتين ($n_1 = 100 > 30..n_2 = 200 > 30$) فإن تقدير الفرق بين النسبتين P_1 و P_1 يتبع التوزيع الطبيعي وفق العلاقة:

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \le P_1 - P_2 \le (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

$$(0.4-0.3) - 1.96\sqrt{\frac{0.4(0.6)}{100} + \frac{0.3(0.7)}{200}} \le P_1 - P_2 \le (0.4-0.3) - 1.96\sqrt{\frac{0.4(0.6)}{100} + \frac{0.3(0.7)}{200}}$$

$$-\mathbf{0.02} \le P_1 - P_2 \le 0.22$$

أي بما أن التقدير يتضمن القيمة 0 فمن الممكن أن لا يكون فرق بين P_1وP_2 عند مستوى معنوية 95 %.

حل التمرين 06:

لدينا : $n_1 = 10$ ، $n_2 = 8$، $S_1 = 200$، $S_2 = 250$ ، $(1-\alpha) = 0.95$

$$\bar{X}_1 = 4000 \text{ ، } \bar{X}_2 = 4600$$

بما أن العينتين مستقلتين والمجتمعين طبيعيين وتبايناهما متساويان و $(n_1 + n_2 - 2 = 10 + 8 - 2 < 30)$ فإن

مجال الثقة للفرق بين متوسطي عمر المصابيح يعطى بالعلاقة التالية:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2} S_c \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$S_c \sqrt{\frac{(n_1-1).S_1{}^2 + (n_2-1).S_2{}^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(10-1).(200)^2 + (8-1).(250)^2}{10+8-2}} = \sqrt{49843.75}$$

$$S_c = 223.26$$

$$(4000 - 4600) - 2.12(223.26)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (4000 - 4600) + 2.12(223.26)\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}$$

$$-824.51 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -375.49$$

حل التمرين 07:

بما أن وزن الأكياس المعبأة يخضع للتوزيع الطبيعي فإن مجال الثقة 99% يخضع لتوزيع فيشر حسب العلاقة التالية:

$$\frac{S^2{}_A/\delta^2{}_B}{f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}} \leq \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \leq \frac{S^2{}_A/\delta^2{}_B}{f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1}}$$

أولا حساب $S^2{}_A\ ,\ \delta^2{}_B$

$$\bar{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{n_1} = \frac{51 + 50 + \cdots + 50}{9} = \frac{456.4}{9} = 50.71$$

$$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{n_1} = \frac{49 + 49.5 + \cdots + 49}{8} = \frac{396.5}{8} = 49.56$$

$$S^2{}_A = \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{X}_A)^2}{n-1} = \frac{3(51-50.71)^2 + 3(50-50.71)^2 + \cdots + 3(50-50.71)^2}{9-1}$$

$$S^2{}_A = \frac{6.5089}{8} = 0.81$$

$$S^2{}_B = \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{X}_B)^2}{n-1} = \frac{2(49-49.56)^2 + 2(50-49.56)^2 + \cdots + 2(48.9-49.56)^2}{7}$$

$$S^2{}_{B} = 1.31$$

$\alpha = 0.05 \leftarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$f_{\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1} = f_{0.025.8.7} = 4.90$$

$$f_{1-\frac{\alpha}{2}.n_1-1.n_2-1=f_{0.975.8.7}} = \frac{1}{f_{0.975.8.7}} = \frac{1}{4.53} = 0.22$$

$$\frac{0.81/1.31}{4.90} \leq \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \leq \frac{0.81/1.31}{0.22}$$

$$0.33 \leq \frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2} \leq 2.82$$

ومنه فإن مجال الثقة 95% للنسبة $\frac{\delta^2{}_1}{\delta^2{}_2}$ محصور بين 0.33 و 20.82 عند مستوى معنوية 1%.

الفصل الرابع: اختبار الفرضيات

- مفاهيم إحصائية
- الفرضية الإحصائية
- اختبار الفرضيات
- خطوات عملية اختبار الفرضيات
- تطبيقات اختبار الفرضيات
- اختبار الفرضيات حول المتوسط
- اختبار الفرضيات حول النسبة
- اختبار الفرضيات حول التباين
- اختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطين
- اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتن
- اختبار الفرضيات حول النسبة بين تباينين
- سلسلة تمارين الفصل الرابع

تمهيد:

لقد تناولنا من خلال الفصل السابق والمتعلق بالتقدير كيفية تكوين فترات الثقة لمعالم المجتمع المجهولة انطلاقا من بيانات العينة، لكن في الكثير من الأحيان يتطلب الأمر اتخاذ قرار حول خواص توزيع مجتمع ما وذلك بناء على بيانات عينة عشوائية اختيرت من هذا المجتمع للوصول إلى هذه القرارات الإحصائية، وعادة ما نقوم بوضع فروض عن أحد معالم هذا المجتمع ونقوم بالتحقق من مدى صحة ومصداقية هذه الفروض المقدرة في تمثيلها لقيم معالم المجتمع، بمعنى آخر نريد التحقق من ادعاء أو تخمين ما حول معلومة ما متعلقة بأحد معالم المجتمع قيد الدراسة الأمر الذي يستدعي التطرق إلى ما يعرف باختبار الفرضيات الإحصائية، هذه الأخيرة تنقسم إلى قسمين: فرضيات حول معالم المجتمع وفرضيات حول صورة دالة التوزيع، إلا أننا من خلال هذه المطبوعة سوف نركز على النوع الأول فقط و أهم تطبيقاته.

4-1 مفاهيم إحصائية

قبل الخوض في اختبار الفرضيات الإحصائية وتطبيقاتها ارتأينا الوقوف على أهم المفاهيم الإحصائية التي ستساعد الطالب على سهولة فهمها بسرعة.

4-1-1 الفرضية الإحصائية

الفرضية الإحصائية تعني ادعاء أو افتراض حول توزيع متغير عشوائي وتكون في الغالب حول معالم التوزيع أو شكله، وبعبارة أشمل الفرضية عبارة عن إفادة، تخمين، تصريح، مقولة حول شكل توزيع أو خصائص متغير عشوائي أو أكثر، يمكن صياغتها على أساس التصورات النظرية أو على أساس المعلومات التي توفرها عينة عشوائية من قيم المتغيرات العشوائية يرمز لها عادة بـ:H_0 ، ويمكن تصنيف الفرضية الإحصائية إلى الفرضية العدمية و الفرضية البديلة[1].

4-1-1-1 الفرضية العدمية

تسمى الفرضية التي يجرى اختبارها بفرضية العدم ويرمز لها بـ: H_0 وهي فرضية تعكس عدم الاختلاف، وبالتالي تظهر علامة التساوي كأن يفترض الباحث أن متوسط الدخل الشهري لشخص ما هو 50000 دج و نكتب: $H_0 : \mu = 50000$

[1] عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى، الاستدلال الإحصائي(02) واختبار الفرضيات،مجموعة النيل العربية، 2010، ص 01.

4-1-1-2 الفرضية البديلة

تسمى الفرضية التي تعكس البديل لفرضية العدم في حالة رفضها بالفرضية البديلة، حيث نقبلها في حالة رفض الفرضية العدمية والعكس صحيح يرمز لها بـ: H_1، فإذا وقفنا على المثال السابق نكتب:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50000 \\ H_1 : \mu \neq 50000 \end{cases}$$ أو

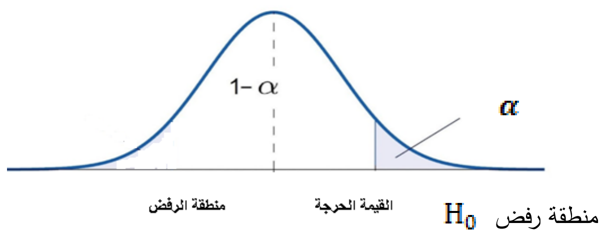
$$H_1 : \mu > 50000$$

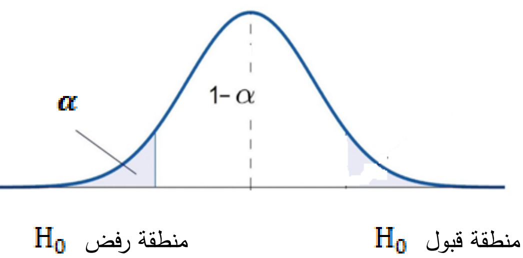
$$H_1 : \mu < 50000$$

4-1-2 اختبار الفرضيات

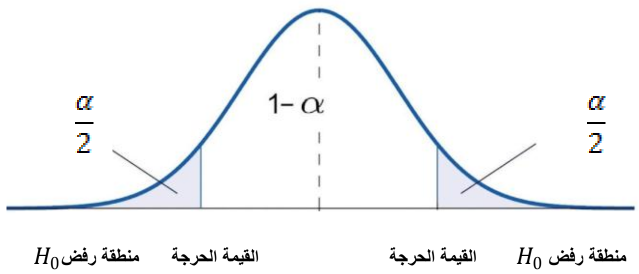
اختبار الفرضية هو قاعدة أو إجراء يؤدي إلى رفض أو عدم رفض فرضية العدم، ويتم اختبار الفرضية بتقسيم فضاء العينة لكل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية إلى جزأين منفصلين، أحدهما للنتائج التي إذا حدثت نرفضها وتسمى منطقة الرفض والآخر للنتائج التي إذا حدثت لا نرفضها وتسمى منطقة القبول، ويطلق على القيمة التي تفصل بين منطقة الرفض ومنطقة القبول بالقيمة (القيم) الحرجة ونميز بين نوعين من منطقة الرفض:

-منطقة رفض تتواجد على جانب واحد (أيمن أو أيسر) ، وهذا في حالة اختبار أحادي الجانب (الذيل) وهو ما يبرزه الشكلين التاليين:





-منطقة رفض تتواجد على الجانبين الأيمن و الأيسر (اختبار ثنائي الجانب (الذيل) ، وهو ما يبرزه الشكل الموالي:



4-1-3 الخطأ في اتخاذ القرار

يقوم الباحث بإجراء تجربة ما يريد من خلالها اختبار فرضية معينة، ومن خلال النتائج المتوصل إليها يقف إما على رفض فرضية العدم و إما عدم رفضها، تعتمد نتيجة هذا الاختبار على عدة عوامل أهمها:حجم العينة، طبيعة المجتمع، مستوى الدلالة.....الخ.

والجدير بالذكر أن الباحث هنا يكون عرضة للوقوع في الخطأ عند اتخاذ قراره بقبول الفرضية العدمية أو رفضها فقد يرفض فرضا هو في الواقع صحيح وقد يقبل فرضا هو في الواقع غير صحيح، لذلك تم تصنيف الأخطاء إلى نوعين هما[2]:

4-1-1 الخطأ من النوع الأول α

يحدث الخطأ من النوع الأول في حال رفض الفرضية العدمية و هي صحيحة وذلك باحتمال قدره α (مستوى الخطر)، أي أنه على الرغم من أن الفرضية العدمية في الواقع أنها صحيحة وكان من الواجب قبولها لكن تم أخذ قرار خاطئ برفضها.

4-1-2 الخطأ من النوع الثاني β

الخطأ من النوع الثاني يعني قبول الفرضية العدمية بينما هي خاطئة، أي أنه على الرغم من أن الفرضية العدمية خاطئة وكان من الواجب رفضها فقد تم أخذ قرار خاطئ بقبولها.

[2] م.د.وقاص سعد خلف _و م.سرمد علوان صالح.الأساليب الكمية جامعة بغداد ص 03.

يمكن توضيح نوعي الخطأ في اتخاذ القرار من خلال الجدول الموالي:

فرض العدم / القرار	قبول H_0	رفض H_0
فرض العدم H_0 صحيح	قرار صحيح	خطأ من النوع الأول α
فرض العدم H_0 خاطئ	خطأ من النوع الثاني β	قرار صحيح

4-1-3 قوة احصاءة الاختبار

كما تم الإشارة إليه في حالة قبولنا لفرضية العدم H_0 وهي غير صحيحة سيؤدي إلى وقوعنا في الخطأ من النوع الثاني، ويعتبر هذا القرار غير سليم، أما القرار السليم فهو عند رفض فرضية العدم H_0 لما تكون خاطئة، وهنا تتجلى قوة الاختبار. فقوة الاختبار إذن تقاس بمدى قدرته على رفض الفرضية الصفرية لما تكون هذه الأخيرة خاطئة.

وعلى هذا الأساس فإن احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني يعتمد على الابتعاد عن H_0، وأيضا على حجم العينة n والانحراف المعياري وعلى مستوى المعنوية α ونوع الاختبار إن كان من جانب واحد أو من جانبين[3].

2-4 مستوى المعنوية: Level of signjfiance

يعد مصطلح مستوى المعنوية من أهم المصطلحات المستخدمة في نظرية اختبار الفرضيات، والمقصود بمستوى المعنوية هو احتمال حدوث خطأ من النوع الأول α أو نسبة حدوثه، أي احتمال رفض الفرضية العدمية بينما هي صحيحة.

من الملاحظات الأساسية أن مستوى المعنوية(مستوى الخطر) والذي يسمى أحيانا مستوى الدلالة هو المكمل لدرجة الثقة أي أن مجموعها يساوي 100% أو الواحد الصحيح بمعنى إذا كان لدينا مستوى الثقة $(1-\alpha) = 90\%$ فإن مستوى الدلالة $\alpha = 10\%$ تعبر عن منطقة رفض الفرضية العدمية، والتي قد تأخذ عدة أشكال حسب شكل التوزيع (أحادي أو ثنائي الذيل).

[3] عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، الأساليب الإحصائية التطبيقية، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2004، ص 286.

4-3 خطوات عملية اختبار الفرضيات

تمر عملية اختبار الفرضيات الإحصائية بعدة خطوات أهمها:

- ✓ صياغة الفرضيات (تشكيل الفرضية العدمية والفرضية البديلة) ،
- ✓ توضيح شروط الاختبار،
- ✓ تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها،
- ✓ قاعدة القرار،
- ✓ حساب احصاءة الاختبار،
- ✓ اتخاذ القرار.

4-4 تطبيقات اختبار الفرضيات

مما سبق ذكره فإن الهدف من اختبار الفرضيات هو اتخاذ قرار بشأن معالم المجتمع بالاعتماد على بيانات العينة المسحوبة منه، وعليه سوف نتناول اختبار الفرضيات حول المتوسط، النسبة، التباين، الفرق بين متوسطي، الفرق بين نسبتين والنسبة بين تباينين.

4-4-1 اختبار الفرضيات حول المتوسط

عند القيام باختبار الفرضيات حول المتوسط نقوم باستخدام إما التوزيع الطبيعي وإما توزيع ستيودنت وذلك حسب الشروط المتوفرة.

4-4-1-1 اختبار الفرضيات حول الوسط باستخدام التوزيع الطبيعي

يتم استخدام التوزيع الطبيعي لاختبار الفرضيات حول متوسط المجتمع في إحدى الحالتين التاليتين:

- ✓ إذا كان توزيع المجتمع طبيعيا وتباينه معلوم،
- ✓ إذا كان توزيع المجتمع طبيعي أو أي توزيع آخر مع $n>30$ وذلك حسب نظرية النهاية المركزية

وتعطى إحصاءة الاختبار وتوزيعها بالعلاقة التالية:

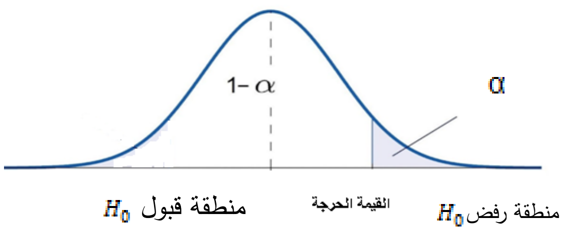
$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\delta_{\bar{x}}} \sim N(0:1)$$

وتكون قاعدة القرار كما يلي:

-في حالة اختبار أحادي الجانب من الشكل التالي:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

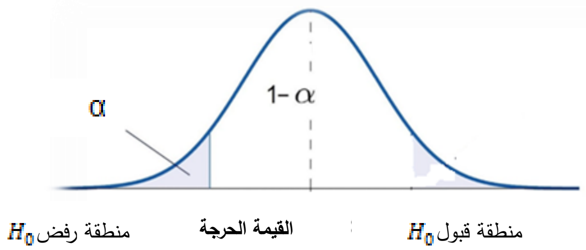
نرفض H_0 لما: $Z_c > Z_a$



-في حالة اختبار أحادي الجانب من الشكل التالي:

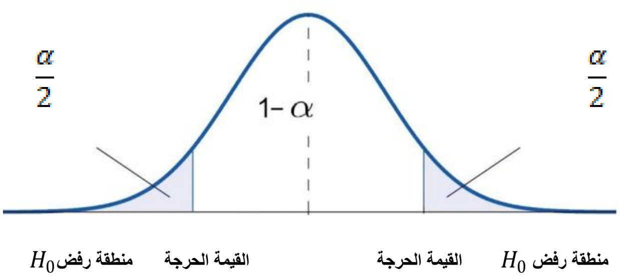
$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

نرفض H_0 لما: $Z_c < -Z_a$



-في حالة اختبار من جانبين (ثنائي الذيل): $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$

نرفض H_0 لما: $Z_c > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z_c < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$



مثال (4-01):

تقدم لاختبار مقنن للذكاء عينة تتكون من 25 طالب من مدرسة ما، وكان متوسط درجاتهم بهذا الاختبار يساوي 115، هل يمكن القول بأن متوسط درجات الطلبة بصفة عامة يختلف عن المتوسط العام عند مستوى معنوية 5% علما أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 110 وتباين 100 ؟

الحل

لدينا: $n = 25, \bar{X} = 115,\ \delta^2 = 100, \alpha = 10\%$

- ✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 110 \\ H_1 : \mu \neq 110 \end{cases}$$

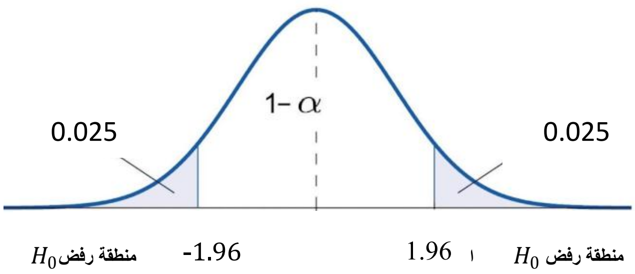
- ✓ **شروط الاختبار:** عينة عشوائية مستخرجة من مجتمع طبيعي تباينه معلوم.
- ✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\delta / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- ✓ **قاعدة القرار:**

$$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = \pm 1.96$$

ومنه فإن قاعدة القرار هي رفض H_0 لما $Z_c < -1.96$ أو $Z_c > +1.96$



✓ **حساب احصاءة الاختبار:**

$$Z_c = \frac{115-110}{10/\sqrt{25}} = 2.5$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن: $1.96 < Z_c = 2.5$ فهي تقع في منطقة الرفض وبالتالي نرفض H_0 أي أن متوسط درجات الطلاب بصفة عامة لا يختلف عن المتوسط العام عند درجة معنوية 5%.

مثال(4−02):

يدعي أحد الأطباء أنه من الآثار الجانبية لاستعمال دواء معين هو انخفاض ضغط الدم بمتوسط 75، تم سحب عينة عشوائية من 49 مريض وتم قياس ضغط الدم لكل مريض بعد تناول الدواء، فوجد أن متوسط ضغط الدم في العينة 65.5 بانحراف معياري 6.4، فهل توافق الطبيب في ادعائه فيما يتعلق باستعمال الدواء عند مستوى معنوية 5%؟

الحل:

لدينا: $n = 49\ ,\ S = 6.4,\ \overline{X} = 65.5\ ,\mu = 75$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 75 \\ H_1 : \mu < 75 \end{cases}$$

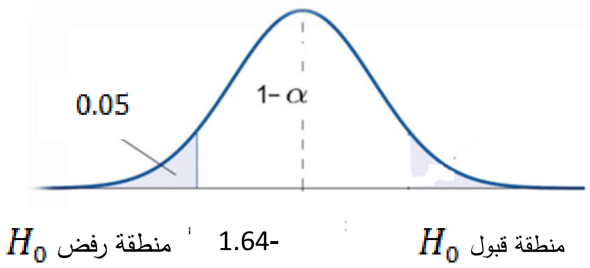
✓ **شروط الاختبار:** عينة عشوائية كبيرة ($n=49>30$) مستخرجة من مجتمع غير طبيعي تباينه مجهول.

✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$Z_c=\frac{\bar{X}-U}{\delta_{\bar{x}}}\sim N(0:1)$$

✓ **قاعدة القرار:** لدينا $-Z_{0.05}=-1.64$ ومنه فإن قاعدة القرار هي رفض H_0 لما

$$Z_c<-1.64$$



✓ **حساب احصاءة الاختبار:**

$$Z_c=\frac{65.5-75}{6.4/\sqrt{49}}=-4.92$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن $Z_c=-4.92<-1.64$ (تقع في منطقة رفض H_0) فإننا نرفض H_0 أي أن ادعاء الطبيب صحيح.

4-4-1-2 اختبار الفرضيات حول الوسط باستخدام توزيع Student

يستخدم توزيع **Student** لاختبار الفرضيات حول وسط المجتمع إذا تحققت الشروط التالية: أن يكون المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه مجهول وحجم العينة صغير $(n<30)$ وتعطى احصاءة الاختبار وتوزيعها بالشكل:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

والتي تتبع توزيع **Student** بدرجات حرية $(n-1)$.

4-4-2 اختبار الفرضيات حول النسبة

يقوم اختبار الفروض المتعلق بالنسبة على تأكيد أو نفي صحة فرضية ما متعلقة بالنسبة P ، فإذا تم سحب عينة عشوائية حجمها $(n > 30)$ من مجتمع يتبع التوزيع الثنائي، فإن احصاءة الاختبار تتبع التوزيع الطبيعي وفق الصيغة التالية:

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0:1)$$

تكون قاعدة القرار عند مستوى معنوية α موضحه في الجدول الموالي:

الفرضية	القرار
$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$	نرفض H_0 إذا كانت $Z_c < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z_c > Z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases}$	نرفض H_0 إذا كانت $Z_c > Z_\alpha$
$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases}$	نرفض H_0 إذا كانت $Z_c < -Z_\alpha$

مثال (4-03):

إذا كانت نسبة العلب التالفة في أحد المصانع تساوي 30% اختيرت عينة عشوائية مكونة من 100 علبة فكان من بينها 400 علبة تالفة، هل تدل هذه النتائج على أن نسبة العلب التالفة تزيد عن 30 % من إنتاج هذا المصنع عند مستوى معنوية 1%؟

الحل:

لدينا: $X=400, \alpha = 1\%$ $P_0 = 0.30,$ $n=100,$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.3 \\ H_1 : p > 0.3 \end{cases}$$

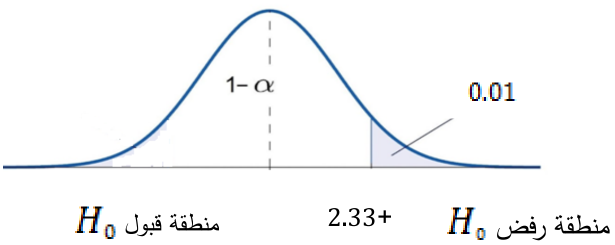
✓ **شروط الاختبار:** عينة عشوائية كبيرة (n=100>30).

✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0:1)$$

✓ **قاعدة الاختبار:** لدينا: $\alpha = 0.01 \Rightarrow Z_{0.01} = +2.33$ ومنه فإن قاعدة القرار هي

رفض H_0 لما $Z_c > 2.33$



✓ **حساب احصاءة الاختبار:** $P = \frac{x}{n}$

$$Z_c = \frac{0.4 - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3(1-0.4)}{100}}} = 6.90$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن Z_c لا تنتمي إلى منطقة القبول $6.90 > 2.33$ إذا نرفض H_0 ونقبل الفرضية البديلة أي أن نسبة العلب التالفة في المصنع تزيد عن 30% عند درجة حرية 99%.

4-4-3 اختبار الفرضيات حول التباين

في بعض الحالات يكون مقدار الاختلاف في البيانات له أهمية كبيرة الأمر الذي يستدعي اختبار الفرضيات المتعلقة بتباين المجتمع، فعند استخراج عينة عشوائية من مجتمع طبيعي فإن توزيع احصاءة الاختبار تتبع توزيع كاي مربع وفق الصيغة التالية:

$$\frac{(n-1)S^2}{\delta^2} \sim X^2_{n-1}$$

وتكون قاعدة القرار عند مستوى معنوية α كما يوضحه الجدول الموالي:

الفرضيات	القرار
$\begin{cases} H_0: \delta^2 = \delta_0^2 \\ H_1: \delta^2 \neq \delta_0^2 \end{cases}$	نرفض H_0 لما: $X^2 < X^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ أو $X^2 > X^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$
$\begin{cases} H_0: \delta^2 = \delta_0^2 \\ H_1: \delta^2 > \delta_0^2 \end{cases}$	نرفض H_0 لما: $X^2 > X^2_{\alpha,n-1}$
$\begin{cases} H_0: \delta^2 = \delta_0^2 \\ H_1: \delta^2 < \delta_0^2 \end{cases}$	نرفض H_0 لما: $X^2 < X^2_{1-\alpha,n-1}$

مثال (4-04):

تنتج آلة قضبان معدنية تتبع أطوالها التوزيع الطبيعي، وحتى يكون الإنتاج متجانسا لا يجب أن يتعدى التباين في أطوال هذه القطع 0.36، توقف الإنتاج لفترة معينة لإصلاح هذه الآلة، وعند معاودة الإنتاج تم محاولة التأكد من أن تباين أطوال القضبان لا يتعدى القيمة السابقة عند مستوى معنوية 5% ، إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها 20 وتباينها 0.42، تأكد من هذه المحاولة.

الحل

لدينا: $n = 20,\ S^2 = 0.42,\ \ \delta^2 = 0.36,\ \alpha = \%5$

- ✓ **صياغة الفرضيات:**

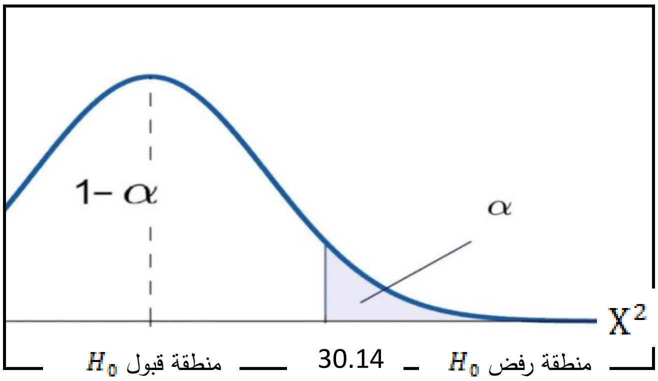
$$\begin{cases} H_0: \delta^2 = 0.36 \\ H_1: \delta^2 > 0.36 \end{cases}$$

- ✓ **شروط الاختبار:** عينة عشوائية مستخرجة من مجتمع طبيعي.
- ✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\delta^2} \sim X^2_{n-1}$$

- ✓ **قاعدة القرار: لدينا** $X^2_{\alpha,n-1} = X^2_{0.05,19} = 30.1435$

وتكون قاعدة القرار رفض H_0 لما تكون $X^2 > 30.1435$



✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار**

$$X^2 = \frac{(20-1)0.42}{0.36} = 22.17$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن: $X^2 = 22.17 < 30.1435$ فإننا نقبل H_0 أي أن تباين أطوال القضبان المعدنية لا يتعدى القيمة المحددة عند مستوى معنوية 5%.

4-4-4 اختبار الفرضيات حول الفرق بين متوسطين

لاختبار الفرضية المتعلقة بالفرق بين متوسطي مجتمعين نسحب عينتن عشوائيتين مستقلتين حجمهما n_1, n_2 على الترتيب ونحسب متوسطيهما ونقوم باختبار تساوي متوسطي المجتمعين. هنا نميز بين ثلاث حالات:

4-4-4-1 حالة تباينا المجتمعين معلومين

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $X_1 \sim N(U_1, \delta_1^2)$ وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها n_2 من طبيعي آخر يتبع التوزيع الطبيعي $X_2 \sim N(U_2, \delta_2^2)$ وكان δ_1^2 δ_2^2 معلومان، فإن احصاءة الاختبار تتبع التوزيع الطبيعي وفق العلاقة التالية:

$$Z = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

يلخص الجدول الموالي نوع الاختبار والقرار المناسب عند درجة معنوية α:

نوع الاختبار	القرار
$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_0: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$	نرفض H_0 إذا كانت $Z_c \geq +Z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z_c \leq -Z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$	نرفض H_0 إذا كانت $Z_c > Z_\alpha$
$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases}$	نرفض H_0 إذا كانت $Z_c < -Z_\alpha$

مثال (4−05):

لاختبار الفرق بين كمية النيكوتين في نوعين من السجائر لمجتمعين مختلفين، أخذت عينتان عشوائيتان من المجتمعين محل الدراسة حجمهما على التوالي:

لدينا: $n_1 = n_2 = 100,\ \bar{X}_1 = 0.8,\ \bar{X}_2 = 1.0, \delta_1^2 = 0.36, \delta_2^2 = 0.64$

- اختبر الفرق بين متوسط كمية النيكوتين في النوعين عند مجال ثقة 99%

الحل:

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

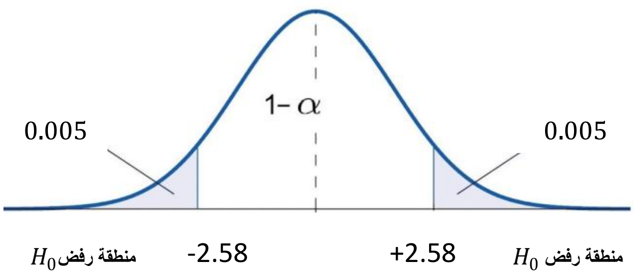
✓ **شروط الاختبار:** عينتين عشوائيتين مستقلتين مسحوبتين من مجتمعين تبايناهما معلومان.

✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$Z_c = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

✓ **قاعدة القرار:** لدينا

$\alpha = 0.01 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = \pm 2.58$ ومنه فإن قاعدة القرار هو رفض H_0 لما $Z_c > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z_c < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$



✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار:**

$$Z_c = \frac{0.8 - 1.}{\sqrt{\frac{0.36}{100} + \frac{0.64}{100}}} = -\mathbf{2}$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن $Z_c = -2 > -2.58$ فإننا نقبل H_0 أي أن متوسط كمية النيكوتين في النوعين متساوي عند مستوى معنوية 01%.

4-4-4-2 حالة تباينا المجتمعين مجهولين وحجم العينتين كبيرتين

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1>30$ من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $X_1 \sim N(U_1, \delta_1^2)$ وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها $n_2>30$ من مجتمع طبيعي آخر يتبع التوزيع الطبيعي $X_2 \sim N(U_2, \delta_2^2)$ وكان δ_1^2 , δ_2^2 مجهولين، فإن احصاءة الاختبار تتبع التوزيع الطبيعي وفق العلاقة التالية:

$$Z = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

4-4-4-3 حالة تباينا المجتمعين مجهولين وحجم العينتين صغيرتين

-تباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين

-تباينا المجتمعين مجهولين وغير متساويين

أ- -تباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1<30$ من مجتمع متوسطه μ_1 وتباينه δ_1^2 وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها $n_2<30$ من مجتمع متوسطه μ_2 وتباينه δ_2^2 وكان δ_1^2, δ_2^2 مجهولان $(\delta_1^2 = \delta_2^2)$

فإن احصاءة الاختبار وتوزيعها تتبع توزيع Student وفق الصيغة التالية:

$$T_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_c\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

$$S_c = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

مثال(4-06):

تدعي إحدى الشركات المصنعة لآلات التصوير أن الآلات الحديثة أسرع من الآلات القديمة، تم اختيار عينة من 09 آلات حديثة فكان متوسط إنتاجها 35.22 وتباينها 24.438 و09 آلات قديمة فكان متوسط إنتاجها 31.56 وتباينها 20.028، إذا علمت أن المجتمعين طبيعيين وتبايناهما متساويان. هل تؤيد ادعاء الشركة عند مستوى معنوية 01%؟

الحل:

لدينا: $n_1 = n_2 = 9,\ \bar{X}_1 = 35.22,\ \bar{X}_2 = 31.56,\ S_1^2 = 24.43,\ S_2^2 = 20.028,\ \alpha = \%01$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 \\ H_1: \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

✓ **شروط الاختبار:** عينتين عشوائيتين صغيرتين مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين$(n_1 = n_2 < 30)$ تبايناهما مجهولان و متساويان.

✓ **تحديد إحصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$T_c=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_c\sqrt{\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\sim t_{n_1+n_2-2}$$

✓ **قاعدة القرار:** لدينا $t_{\alpha,n_1+n_2-2}=1.3368$ ومنه فإن قاعدة القرار هي رفض H_0 لما

$t_c>1.3368$

✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار:**

$$S_c=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{(9-1)24.438+(9-1)20.028}{9+9-2}}=4.71$$

$$t_c=\frac{(35.22-31.56)}{4.71\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}}=1.64$$

✓ **اتخاذ القرار:** بما أن $t_c=1.64>1.3368$ فإننا نرفض H_0 أي أن الآلات الحديثة أسرع من الآلات القديمة عند مستوى معنوية 01%.

ب- تباينا المجتمعين مجهولين وغير متساويين

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1<30$ من مجتمع متوسطه μ_1 وتباينه δ_1^2 وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها $n_2<30$ من مجتمع متوسطه μ_2 وتباينه δ_2^2 وكان δ_2^2 و δ_1^2 مجهولان $(\delta_1^2\neq\delta_2^2)$

فإن احصاءة الاختبار وتوزيعها تتبع توزيع Student وفق الصيغة التالية:

$$T_c=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)}}\sim t(v,\alpha)$$

التي سيكون لها توزيع t تقريبا عندما يكون فرض العدم صحيحا وبدرجات حرية v كالآتي:

$$v = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

مثال(4-06):

أخذت عينة عشوائية حجمها 9 ووسطها الحسابي 28 وانحرافها المعياري 2 من مجتمع ما، وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها 8 ووسطها الحسابي 25 وانحرافها المعياري 1.2، بافتراض أن المجتمعين مستقلين وتبايناهما مجهولان ومتساويان. اختبر فرضية عدم وجود فروق بين وسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

لدينا: $n_1 = 9,\ \ n_2 = 8,\ \ \bar{X}_1 = 28,\ \ \bar{X}_2 = 25,\ \ S_1 = 2,\ \ S_2 = 1.2,\ \ \alpha = 5\%$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

✓ **شروط الاختبار:** عينتين عشوائيتين صغيرتين ($n_1,n_2 < 30$) مستخرجتين من مجتمعين تبايناهما مجهولان وغير متساويان.

✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$T_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)}} \sim t(v, \alpha)$$

✓ **قاعدة القرار:** لدينا $T_{(12,0.025)} = \pm 2.179$

ومنه فإن قاعدة القرار هي رفض H_0 لما $T_c > 2.179$ أو $T_c < -2.179$

✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار:**

$$T_c = \frac{28 - 25}{\sqrt{\left(\frac{(2)^2}{9} + \frac{(1.2)^2}{8}\right)}} = 3.79$$

$$\mathbf{v} = \frac{\left(\frac{(2)^2}{9} + \frac{(1.2)^2}{8}\right)^2}{\frac{\left({(2)^2}/{9}\right)^2}{9-1} + \frac{\left({(1.2)^2}/{8}\right)^2}{8-1}} = 12.19$$

✓ **اتخاذ القرار:** بما أن:

أي أن $t_c = 3.79 > +2.179$ القيمة المحسوبة تنتمي إلى منطقة رفض الفرضية العدمية, وبالتالي نقبل الفرضية البديلة بمعنى وجود فروق بين وسطي المجتمعين عند مستوى معنوية 5%.

4-4-4-4 اختبار الفرضيات حول الفرق بين وسطي مجتمعين حالة عينتين غير مستقلتين

إذا أخذت عينتين عشوائيتين غير مستقلتين من مجتمعين طبيعيين تبايناهما مجهولان فإن الفرق

$$d_i = X_{i1} - X_{i2}$$

له توزيع طبيعي بمتوسط μ_d وتباين ${S_d}^2$ وتكون احصاءة الاختبار كما يلي:

$$T = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

حيث أن: $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i, \qquad S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$

مثال(4-07):

استحدث مخبر معين دواء جديد لعلاج ارتفاع ضغط الدم ولمعرفة مدى فعالية هذا الدواء اختيرت عينة عشوائية مكونة من 8 أشخاص، تم قياس ضغط الدم لكل منهم قبل وبعد تناول الدواء فكانت النتائج كما يلي:

قبل اخذ الدواء	160	170	150	165	140	170	180	190
بعد اخذ الدواء	150	150	145	160	135	160	170	175

إذا علمت أن ضغط الدم يتبع التوزيع الطبيعي، هل يمكن القول بأن لهذا الدواء أثر في تخفيض ضغط الدم عند مستوى معنوية 1%؟

الحل

X_{i1}	160	170	150	165	140	170	180	190
X_{i2}	150	150	145	160	135	160	170	175
d_i	10	20	5	5	5	10	10	15

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{8} d_i}{n} = \frac{10+20+\cdots+15}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

$$S_d = \frac{\sum(d_i-\bar{d})^2}{n-1} = \sqrt{\frac{200}{7}} \simeq 5.35$$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: M_d = 0 \\ H_1: M_d > 0 \end{cases}$$

✓ **شروط الاختبار**: عينتين عشوائيتين غير مستقلتين مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين مجهولي التباين.

✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$t_c = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

✓ **قاعدة القرار:**

$\alpha = 0.01 \Rightarrow t_{\alpha,n-1} = t_{0.01,7} = 2.9980$ ومنه نرفض H_0 لما لما

$$t_c > 2.9980$$

✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار:**

$$t_c = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} = \frac{100}{5.35/\sqrt{8}} \simeq 5.29$$

✓ **اتخاذ القرار:** بما أن $t_c = 5.29 > 2.9980$ فإننا نرفض H_0 أي أن للدواء أثر في تخفيض ضغط الدم عند مستوى معنوية 01%.

4-4-5 اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتن

إذا تم سحب عينتين مستقلتين وكان حجمهما كبير ($n_2>30$ و $n_1>30$) وكان توزيع المعاينة لنسبة ظاهرة ما تتبع التوزيع الطبيعي بحيث: $N\sim\left(P_1,\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}}\right)$، و $N\sim\left(P_2,\sqrt{\frac{P_2q_2}{n_2}}\right)$ فإن الفرق P_1-P_2 يتبع التوزيع الطبيعي:

$$N\sim\left(P_1-P_2,\sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1}+\frac{P_2q_2}{n_2}}\right)$$

وتكون احصاءة الاختبار حسب الفرضية $H_0: P_1 = P_2$ وفق الصيغة التالية:

$$\boldsymbol{Z = \frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1}+\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1}}}\sim N(0,1)}$$

حيث: $\hat{P} = \frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$ هو التقدير المشترك لنسبتي العينتين $\hat{P}_1$ و $\hat{P}_2$

يوضح الجدول الموالي اتخاذ القرار حسب الفرضيات الممكنة عند درجة معنوية α:

الفرضية	القرار
$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$	نرفض H_0 إذا كانت $Z_c \geq +Z_{\frac{\alpha}{2}}$ أو $Z_c \leq -Z_{\frac{\alpha}{2}}$
$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 > P_2 \end{cases}$	نرفض H_0 إذا كانت $Z_c > Z_\alpha$
$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 < P_2 \end{cases}$	نرفض H_0 إذا كانت $Z_c < -Z_\alpha$

مثال(4−08):

في دراسة حول السمنة بالنسبة للأشخاص الذين تتراوح أعمارهم بين20 و70 سنة اختيرت عينة عشوائية من 140 ذكر فوجد من بينهم 20 مصابا بالسمنة، وعينة من 180 أنثى فوجد من بينهن 44 مصابة بالسمنة. هل يمكن القول بأن هناك فرق ما بين نسبتي الذكور والإناث الذين يعانون من السمنة عند مستوى معنوية 05% ؟

الحل:

لدينا: $n_1 = 140, \quad n_2 = 180, \quad x_1 = 20, \quad x_2 = 44, \quad \alpha = 05\%$

- ✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: P_1 = P_2 \\ H_1: P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

- ✓ **شروط الاختبار:** العينتين المستخرجتين مستقلتين وحجمهما كبير ($n_1>30$ و $n_2>30$).
- ✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1}}} \sim N(0,1)$$

✓ **قاعدة القرار :** لدينا

ومنه نرفض H_0 اذا كانت $Z_c \geq +1.96$ أو $Z_c \leq -1.96$ ، $\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = +1.96$

✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار:**

لدينا: $\hat{P}_1 = \frac{20}{140} = 0.1429$

$$\hat{P}_2 = \frac{44}{180} = 0.2444$$

$$\hat{P} = \frac{20+44}{140+180} = 0.2$$

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1}}} = \frac{(0.1429 - 0.2444)}{\sqrt{\frac{(0.2)(1-0.2)}{140} + \frac{(0.2)(1-0.2)}{180}}} = -2.2506$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن $-1.96 > Z = -2.2506$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى معنوية 5%.

4-4-6 اختبار الفرضيات حول النسبة بين تباينين

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 وتباينها S_1^2 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, \delta_1^2)$ وأخذت عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمها n_2 وتباينها S_2^2 من مجتمع آخر $N(\mu_2, \delta_2^2)$ ، فإن احصاءة الاختبار المتعلقة بتساوي أو نفي تساوي تبايني مجتمعين طبيعيين ومستقلين تتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $v_1 = (n_1 - 1)$ ، $v_2 = (n_2 - 1)$. وتأخذ الشكل التالي:

$$F_c = \frac{S^2{}_1/\delta^2{}_1}{S^2{}_2/\delta^2{}_2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{(v_1\,,\,v_2,\alpha)}$$

ويكون نوع الاختبار واتخاذ القرار عند درجة معنوية α موضحا في الجدول الموالي[4]:

الفرضية	إحصاءة الاختبار	القرار
$\begin{cases} H_0: \delta_1^2 = \delta_2^2 \\ H_1: \delta_1^2 \neq \delta_2^2 \end{cases}$	$*F = \frac{L}{M}$	نرفض H_0 لما: $F_c > F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$ **
$\begin{cases} H_0: \delta_1^2 = \delta_2^2 \\ H_1: \delta_1^2 > \delta_2^2 \end{cases}$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	نرفض H_0 لما: $F_c > F_{\alpha,v_1,v_2}$, أو
$\begin{cases} H_0: \delta_1^2 = \delta_2^2 \\ H_1: \delta_1^2 < \delta_2^2 \end{cases}$	$F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$	نرفض H_0 لما: $F_c < F_{1-\alpha,v_1,v_2}$,

حيث: $\frac{1}{F_{\alpha,v_2,v_1}} = F_{\alpha,v_1,v_2}$, وأن * :$L$ يمثل التباين الأكبر و M يمثل التباين الأصغر.

** v_1 درجات الحرية المصاحبة للتباين الأكبر و v_2 درجات الحرية المصاحبة للتباين الأصغر.

مثال(4−09):

تم مقارنة نوعين من الدواء لتسكين الألم لمرض معين من حيث الفترة التي يستغرقها كل دواء حيث أعطي النوع الأول من الدواء لعينة مكونة 16 شخص والنوع الثاني لعينة مكونة من 13 شخص فكان تباين العينة الأولى 64 وتباين العينة الثانية 16، هل يمكن القول بأن هناك فرق معنوي بين تبايني المجتمعين عند مستوى معنوية 05%؟

الحل:

لدينا: $n_1 = 16,\ \ n_2 = 13,\ \ S_1^2 = 64,\ \ S_2^2 = 16,\ \ \alpha = 05\%$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \delta_1^2 = \delta_2^2 \\ H_1: \delta_1^2 \neq \delta_2^2 \end{cases}$$

✓ **شروط الاختبار:** عينتين عشوائيتين مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين.

---

[4] عبد السلام العماري وآخرون، مرجع سبق ذكره، ص 546.

✓ **احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{v_1,v_2}$$

قاعدة القرار: نرفض $\boldsymbol{H_0}$ لما: $F_c > F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$ أو $F_c < F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$

$$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = F_{0.025,15,12} = 3.18$$

✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار:**

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{64}{16} = 4$$

✓ **اتخاذ القرار:** بما أن $F_c = 4 > 3.18$ تقع ضمن منطقة رفض H_0 فإننا نقبل H_1 عند مستوى معنوية 05%.

سلسلة تمارين الفصل الرابع:

تمرين 01:

حسب الخبرة السابقة تتوزع علامات الطلاب في مادة الإحصاء الاستدلالي للسنة الثانية قسم الاقتصاد بإحدى الجامعات وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 70 وانحراف معياري يساوي 06، لأجل معرفة مستوى الطلاب تم اختيار 16 طالب عشوائيا فوجد أن متوسط العلامات يساوي 73، من خلال ما تقدم هل يمكن القول بأن مستوى الطلاب الحالي يختلف عن مستوى طلاب السنوات السابقة عند مستوى معنوية 05%؟

تمرين 02:

تدعي شركة لإنتاج البطاريات التي تستخدم في الأجهزة الطبية بأن عمر البطارية من إنتاجها يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 3 سنوات أخذت عينة عشوائية من إنتاج هذه الشركة تحوي 6 بطاريات فكانت أعمارها كما يلي: 3.5 –4.0 –0.9 –2.9–1.9–3.8

– هل تبالغ الشركة في ادعائها بالنسبة لمتوسط عمر البطاريات التي تنتجها عند مستوى معنوية 01% ؟

تمرين 03:

يدعي متحدث حكومي لمكافحة التلوث أن أكثر من 80% من المصانع في منطقة ما تستوفي معايير مكافحة التلوث، من أجل التأكد من مدى صحة هذا الإدعاء تم اختيار عينة عشوائية من البيانات المنشورة عن مكافحة التلوث في 64 مصنع في المنطقة فوجد أن من بينها 56 مصنعا مستوفي لمعايير مكافحة التلوث.

–هل تؤيد بيانات العينة عند مستوى معنوية 05% ؟

تمرين 04:

تستورد شركة للالكترونيات قطعا للغيار من مصدرين مختلفين لكن إدارة مراقبة الجودة لديها شعور بأن هناك فرق في جودة القطع المستوردة من المصدرين للتأكد من هذا الشعور، تم اختيار عينتين عشوائيتين مستقلتين من المصدرين الأولى حجمها 50 بمتوسط يساوي 153 والثانية حجمها 100 بمتوسط يساوي 150، إذا علمت أن تباين جودة القطع المستوردة من المصدر الأول يساوي 10 بينما تباين جودة القطع المستوردة من المصدر الثاني يساوي 25، هل يمكن القول بأن هناك فروق معنوية بين متوسطي جودة القطع المستوردة من المصدرين عند مستوى معنوية 01% ؟

تمرين 05:

تدعي شركة لصناعة الألبان أن التباين في كمية الدهون في الحليب كامل الدسم المصنعة من قبل الشركة لا تزيد عن 0.25، للتأكد من صحة هذا الادعاء سحبت عينة عشوائية من 41 علبة من الحليب فتبين أن لديها تباين 0.27. هل هناك دليل كافي لرفض ادعاء الشركة عند مستوى معنوية 05% بافتراض أن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي؟

تمرين 06

قمنا بسحب عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين طبيعيين فتحصلنا على النتائج التالية:

$$n_1 = n_2 = 10, \quad , \quad S_1 = 4, \quad S_2 = 5$$

- اختبر فرضية تساوي تباينا المجتمعين عند مستوى معنوية 10%.

حل التمرين 01:

لدينا: $n = 16, \quad \overline{X} = 73, \quad \mu = 70, \quad \delta = 6, \quad \alpha = 05\%$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 70 \\ H_1 : \mu \neq 70 \end{cases}$$

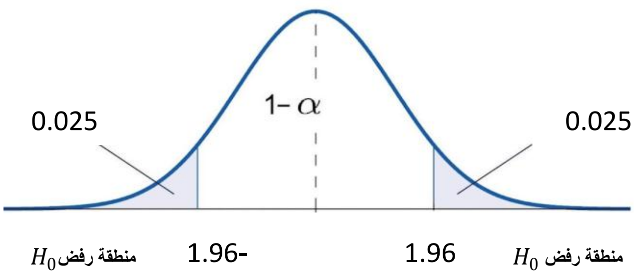
✓ **شروط الاختبار:** عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع طبيعي تباينه معلوم.

✓ **احصاءة الاختبار وتوزيعها:** $Z_c = \frac{\bar{X} - U}{\delta_{\bar{x}}} \sim N(0:1)$

✓ **قاعدة القرار:**

$$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = \pm 1.96$$

ومنه فإن قاعدة القرار هي رفض H_0 لما $Z_c < -1.96$ أو $Z_c > +1.96$



✓ **حساب احصاءة الاختبار:**

$$Z_c = \frac{73-70}{6/\sqrt{16}}$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن: $Z_c=2>1.96$ فهي تقع في منطقة الرفض وبالتالي نرفض H_0 أي أن مستوى الطلاب الحالي يختلف عن مستوى طلاب السنوات السابقة عند مستوى معنوية 05%.

<u>حل التمرين 02:</u>

لدينا: $n = 6\ ,\ S =?,\ \ \bar{X} =?\ ,\ \ \mu = 3$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 3 \\ H_1 : \mu < 3 \end{cases}$$

✓ **شروط الاختبار:** عينة عشوائية صغيرة ($n=6<30$) مستخرجة من مجتمع غير طبيعي تباينه مجهول.

✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$t_c = \frac{\bar{X}-U}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{\alpha,n-1}$$

✓ **قاعدة القرار:** لدينا $t_{0,01,5} = 3.365$ ومنه فإن قاعدة القرار هي رفض H_0 لما

$$t_c < -3.365$$

✓ **حساب احصاءة الاختبار:**

$$\bar{X} = 2.83, \qquad S = 1.23$$

$$t_c = \frac{2.83 - 3}{1.21/\sqrt{6}} = -0.33$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن $t_c = -0.33 > -3.365$ (تقع في منطقة رفض H_0) فإننا نرفض H_0 أي أن الشركة لم تبالغ في ادعائها.

<u>حل التمرين 03:</u>

لدينا: $\alpha = 05\%$ x=56, P_0 =0.80, n=64,

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: p = 0.8 \\ H_1: p < 0.8 \end{cases}$$

✓ **شروط الاختبار:** عينة عشوائية كبيرة (n=64>30).

✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$Z_c = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} \sim N(0:1)$$

✓ **قاعدة الاختبار:** لدينا: $\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{0.05} = -1.65$ ومنه فإن قاعدة القرار هي رفض H_0 لما $Z_c < -1.65$

✓ **حساب احصاءة الاختبار:** $\hat{P} = \frac{x}{n} = \frac{56}{64} = 0.875$

$$Z_c = \frac{0.8 - 0.875}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{64}}} = -1.5$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن Z_c تنتمي إلى منطقة قبول H_0 أي $-1.65 < -1.5$ إذا نقبل H_0 ونرفض الفرضية البديلة أي أننا نؤيد ادعاء المتحدث الحكومي لمكافحة التلوث بأن أكثر من 80% من المصانع في منطقة ما تستوفي معايير مكافحة التلوث عند مستوى معنوية 05% .

حل التمرين 04:

لدينا: $n_1 = 50, \quad \overline{X}_1 = 153, \quad S_1^2 = 10$

$n_2 = 100, \quad \overline{X}_2 = 150, \quad S_2^2 = 25$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0} \\ \boldsymbol{H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0} \end{cases}$$

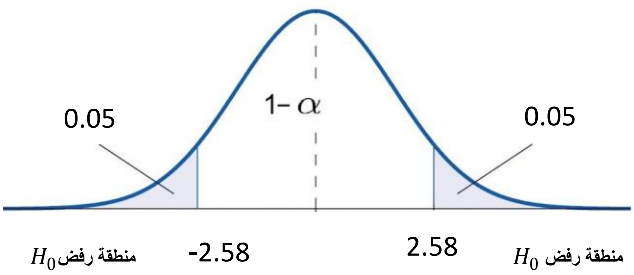
✓ **شروط الاختبار:** عينتان عشوائيتان مستقلتان مسحوبتان من مجتمعين تبايناهما معلومان.

✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$\boldsymbol{Z_c = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\delta_1^2}{n_1} + \frac{\delta_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)}$$

✓ **قاعدة القرار:** لدينا

$\alpha = 0.01 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = \boldsymbol{\pm 2.58}$ ومنه فإن قاعدة القرار هو رفض لما $\boldsymbol{Z_{\frac{\alpha}{2}}} < Z_c$ أو $\boldsymbol{Z_c < -Z_{\frac{\alpha}{2}}}$



✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار:**

$$Z_c = \frac{153-150}{\sqrt{\frac{10}{50}+\frac{25}{100}}} = \mathbf{4.477}$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن $Z_c = 4.477 > 2.58$ فإننا نرفض H_0 أي أن هناك فروق معنوية بين متوسطي جودة القطع المستوردة من المصدرين عند مستوى معنوية 01%.

حل تمرين 05:

لدينا: $n = 41, \quad S^2 = 0.27, \quad \delta^2 = 0.25, \quad \alpha = \%5$

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \delta^2 = 0.25 \\ H_1: \delta^2 > 0.25 \end{cases}$$

✓ **شروط الاختبار:** عينة عشوائية مستخرجة من مجتمع طبيعي.

✓ **تحديد احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\delta^2} \sim X^2_{n-1}$$

✓ **قاعدة القرار: لدينا** $X^2_{\alpha,n-1} = X^2_{0.05,40} = 55.758$

✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار**

$$X^2 = \frac{(41-1)27}{0.25} = 43.2$$

✓ **اتخاذ القرار:**

بما أن: $X^2 = 43.2 < 55.758$ فإننا نقبل H_0 أي أنه ليس هناك دليل كافي لرفض ادعاء الشركة بأن تباين كية الدهون في الحليب لا تزيد عن 0.25 عند مستوى معنوية **5%**.

حل التمرين 06:

✓ **صياغة الفرضيات:**

$$\begin{cases} H_0: \delta_1^2 = \delta_2^2 \\ H_1: \delta_1^2 \neq \delta_2^2 \end{cases}$$

✓ **شروط الاختبار:** عينتين عشوائيتين مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين.

✓ **احصاءة الاختبار وتوزيعها:**

$$F_c = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{v_1,v_2}$$

قاعدة القرار: نرفض H_0 لما: $F_c > F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$ أو $F_c < F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$

$$F_{\frac{\alpha}{2},v_2,v_1} = F_{0.05,9,9} = 3.18$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}} = \frac{1}{F_{0.95,9,9}} = \frac{1}{2.44} = 0.41$$

✓ **تحديد قيمة احصاءة الاختبار:**

$$F_c = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{(5)^2}{(4)^2} = 1.56$$

✓ **اتخاذ القرار:** بما أن F_c تقع ضمن منطقة قبول H_0 فإننا نقبل H_0, أي أن إدعاء تساوي التباينين صحيح عند مستوى معنوية 10%.

قائمة المراجع:

- دومينيك سالفادور ، الإحصاء والاقتصاد القياسي الطبعة الخامسة إلى العربية ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية مصر 2001.

- شبيزل ، شيلز، سرينيفيسان، ترجمة محمد على الناصر، مصطفى جمال مصطفى، الاحتمالات والإحصاء، الدار الدولية للاشهارات الثقافية، مصر، 2004.

- عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى، الاستدلال الإحصائي(02) واختبار الفرضيات، مجموعة النيل العربية، 2010.

- عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، الأساليب الإحصائية التطبيقية، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن،286.

- عبد السلام العماري، على حسين العجيلي، الإحصاء والاحتمالات النظريات والتطبيق، منشورات ELGA جامعة الفاتح، 2000.

- عدنان بن ماجد بن عبد الرحمن بري، محمود إبراهيم هندي، أنور احمد محمد عبد الله، مبادئ الإحصاء والاحتمالات، جامعة الملك سعود، 1997.

- موساوي عبد النور، بركان يوسفي، الإحصاء 2، دار العلوم للنشر والتوزيع ، 2010.

- م.د.وقاص سعد خلف _و م.سرمد علوان صالح.الأساليب الكمية جامعة بغداد.